Límite de una función

La noción de **límites** se refiere en términos coloquiales a lo que nos lleva nuestra intuición: es aquello a lo que nos podemos acercar hasta que queramos.

El **límite** es una noción muy importante en el cálculo matemático. Fundamental para áreas, continuidad, asíntotas, convergencia, derivadas o integrales.

En el **límite de una función** las claves son la variable x y los diferentes valores que adquiere la función $f(x)$. En el **límite de una sucesión**, la equivalencia del papel de x es el índice n, mientras que los términos a_n de la sucesión equivaldrían al papel de los valores de $f(x)$.

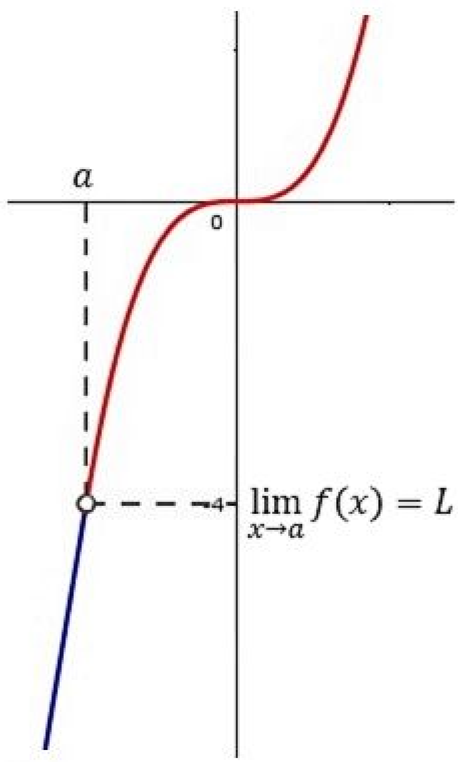
Límite define formalmente ese valor cuando nos acercamos a un determinado punto, tanto para el límite de una función como para el límite de una sucesión.

En matemáticas, el límite de una función en un punto o el de una sucesión es el valor **único** al que se acerca la función cuando la variable independiente x se aproxima, tan cerca como queramos, a un valor establecido o es el término de una **sucesión** cuando el índice n tiende al infinito.

En una **función**, si al valor del límite lo llamamos ***L*** y al punto al que tiende la variable independiente lo llamamos ***a***, la expresión del límite sería:

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

Se puede ver en esta figura:

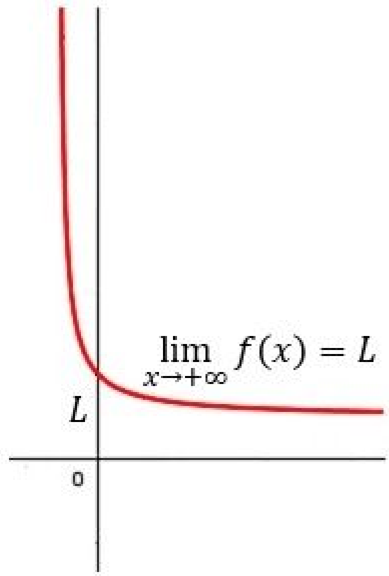


El límite, si existe, no requiere que exista en la función el valor *f(a)*, aunque el límite tienda a él. También puede ocurrir que el valor de la función en el punto $x = a$ sea un valor diferente al del límite buscado.

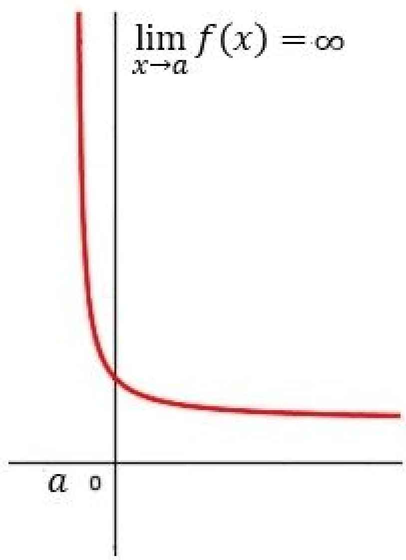
Como en este caso, en que el límite *L* existe aunque no exista el valor *f(a)* en esta función:

$$f(a) = \nexists$$

Aparte de tender la *x* a un número finito *a*, pueden haber límites en que *x*tienda a +∞ (en los que nos acercaremos a +∞ por la izquierda de la recta real), a -∞ (en los que nos acercaremos a +∞ por la derecha) o, genéricamente a ∞. Son los **límites al infinito**.



Cuando la función tiende a hacerse indefinidamente grande hacia valores positivos o negativos, estamos en un caso de **límites infinitos**.



Una **sucesión** puede tener un límite finito (sucesión **convergente**), infinito (**sucesión con límite infinito**) o, simplemente, no tener límite.

Hay muchos **límites de una sucesión** de gran importancia en el cálculo matemático, como por ejemplo el número *e*.

Límite de una función

El **límite de una función** es el valor al que tiende ésta cuando la variable independiente tiende a un valor *a*($x \to a$) y se escribe:

$$L = \lim_{x \to a} f(x)$$

En el caso de existir este límite, éste es **único** (primera de las propiedades de los límites).

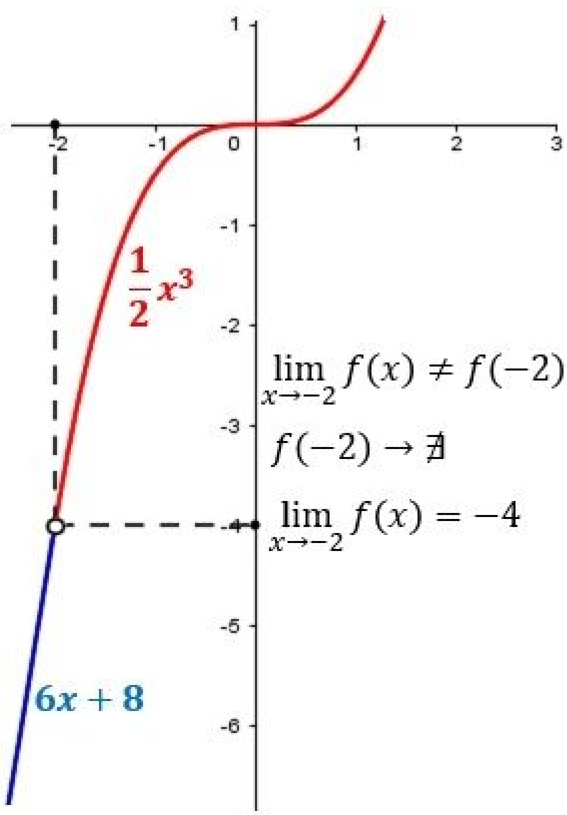
No necesariamente se cumple que:

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Veamos un ejemplo en la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x^3 & si\ x > -2 \\ 6x + 8 & si\ x < -2 \end{cases}$$

En ella existe el límite para $x \to -2$, pero no existe $f(-2)$:



La condición necesaria y suficiente para que exista el límite es que los límites laterales existan y que estos sean iguales:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a} f(x)$$

No se busca *f(a)* sino los valores de la función *f(x)* en las proximidades de *a* a su izquierda y a su derecha.

Límite de una función en un punto

Para ver el **límite de una función en un punto**, partimos de del concepto de **límite**.

A cualquier punto *a* de la recta real (valor al que tiende *x*), nos podemos acercar, en el caso de la existencia del límite, tanto como queramos, tanto por su izquierda como por su derecha. Son los **límites laterales**.

Al extremo derecho de la recta real, es decir, a +∞, solamente nos podemos acercar por la izquierda; al extremo izquierdo de la recta real, es decir, a -∞, solamente nos podemos acercar por la derecha. Ambos casos son los **límites al infinito**.

En un punto de la variable *x* → *a* de una función *f(x)*, podemos comprobar si existe el límite y su valor, dándole valores a la variable cada vez más cercanos a *a*, **por la izquierda** y **por la derecha**.

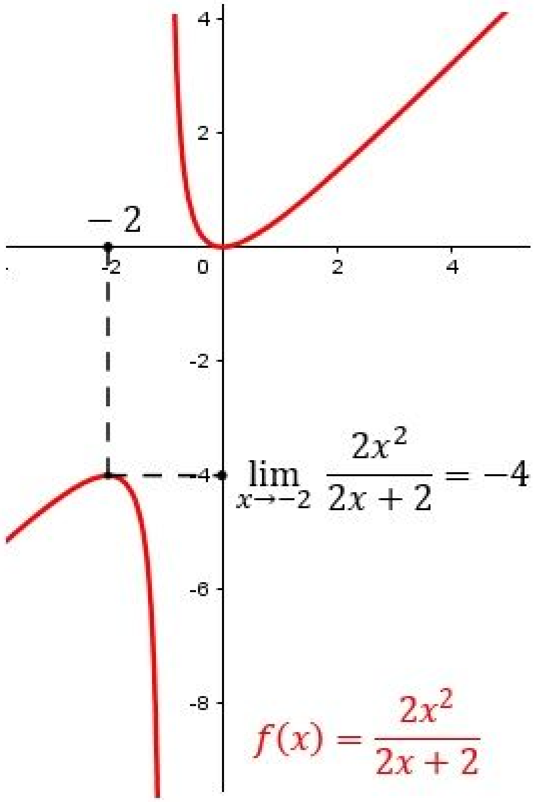
Veamos este límite:

$$\lim_{x \to -2} \frac{2x^2}{2x+2}$$

Le damos valores cada vez más próximos a -2 por ambos lados, según esta tabla:

	$x \to -2$ $\Rightarrow$		L	$x \to -2$ $\Leftarrow$	
x	-1,9	-1,99	**-2**	-2,01	-2,1
$f(x) = \frac{2x^2}{2x+2}$	-4,0111	-4,0001	**-4**	-4,0001	-4,0091

Como se ve en la figura:



Es indiferente que *f(x)* esté definida o no en *a* (en el ejemplo anterior, no está definida en x = -2) ni que el valor *f(a)* coincida con el límite. Lo importante es el valor de la función cuando *x* se acerca más y más a *a* en su entorno.

Para calcular el **límite de una función en un punto** de su dominio, cuando son del tipo polinómica, racional, exponencial o logarítmica, o en las funciones trigonométricasrestringidas en su dominio, es suficiente con sustituir en *x* el valor *a*para el que queremos averiguar el límite.

Límites laterales

Una función tiene **límite** si existen los dos **límites laterales** y éstos coinciden.

El límite de una función *f(x)* en *a*, si existe, este límite es único.

Se podrían dar valores a *x* cada vez más próximos a *a* por la izquierda o por la derecha. Obtendremos el límite lateral por la izquierda, al que llamaremos L_1 y/o el límite lateral por la derecha, al que llamaremos L_2.

Por lo tanto, para que exista el **límite** *L* de una función *f(x)* en *a*, si existe, deben ser iguales el límite por la izquierda y el límite por la derecha, $L_1 = L_2$.

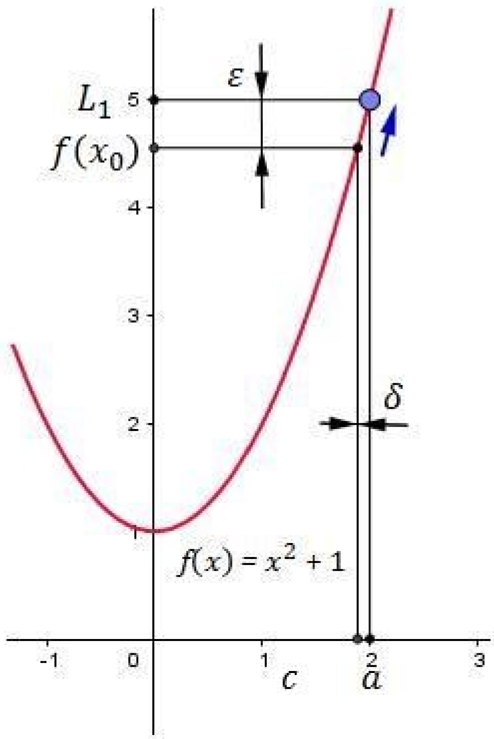
Límites laterales por la izquierda

Se denomina **límite por la izquierda** (o límite lateral por la izquierda), al que llamaremos L_1 de una función *f(x)* definida en el intervalo abierto (*a*, *c*) y en un punto *a*, a la imagen, o el valor que toma esa función, cuando el valor de la variable *x* se acerca mucho a *a*, siendo $x < a$.

Se escribe:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = L_1$$

Para cualquier valor muy pequeño δ > 0 se corresponde otro ε > 0, de manera que siempre que $0 < a - x < \delta$ debe de cumplirse que: $|f(x) - L_1| < \varepsilon$.



Veamos como los valores de *x* se aproximan a *a* por la izquierda (en el ejemplo de la tabla, $a^- = 2$) y, al mismo tiempo, la función *f(x)*, en este caso, se aproxima también por la izquierda al límite lateral por la izquierda, L_1.

					L_1
x	1,9	1,99	1,999	1,9999	$\to 2^-$
$f(x) = x^2 + 1$	4,6100	4,9601	4,9960	4,9996	$\to 5$

Límtes laterales por la derecha

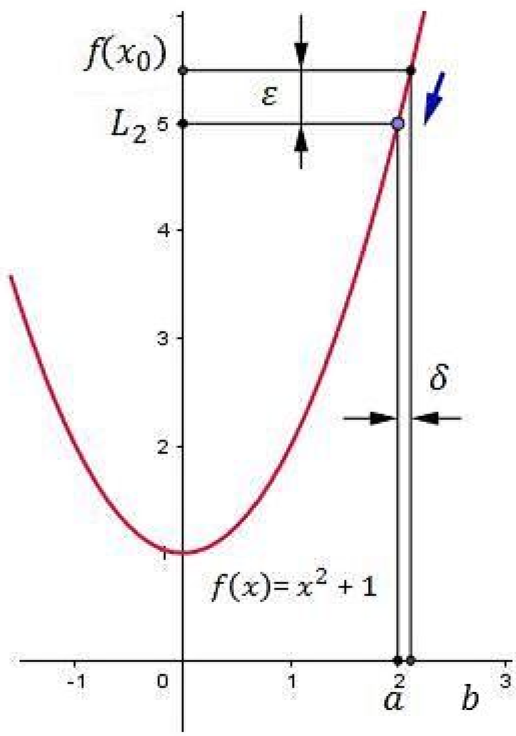
Se denomina **límite por la derecha**(o **límite lateral** por la derecha), al que llamaremos L_2 de una función *f(x)*definida en el intervalo abierto (*a*, *b*) y en un punto *a*, al valor que toma esta función *f(x)*, cuando el valor de la variable *x* se acerca mucho a *a*, pero siendo *x* > *a*.

Se escribe:

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L_2$$

Para cualquier valor tan pequeño δ > 0 se corresponde otro ε > 0, de manera que siempre que 0 < *x* – *a* < δ debe de cumplirse que: $|f(x) – L_1| < ε$.

Para cualquier valor tan pequeño como se quiera y positivo δ > 0 se corresponde otro también positivo ε > 0, de manera que siempre que 0 < *a* – *x* < δ debe de cumplirse que: $|f(x) – L_2| < ε$.



Veamos como los valores de *x* se aproximan a *a* (en el ejemplo de la tabla a^- = 2) por la derecha y, al mismo tiempo, la función *f(x)* se aproxima por la derecha a L_2.

L_2					
2^+ ←	2,0001	2,001	2,01	2,1	***x***
5 ←	5,0004	5,0040	5,0401	5,4100	***f(x)***

Propiedades de los límites

Las **propiedades de los límites** son operaciones que se pueden emplear para simplificar el cálculo del límite de una función más compleja. Al tratarse de operaciones, también se le denimina **álgebra de los límites**.

Sean *f(x)* y *g(x)* dos funcionesdefinidas en un mismo intervalo en donde está el valor *a* del límite y *k* una constante.

- **Unicidad del límite**: cuando el límite existe, el límite es único.

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a} f(x) = L$$

- **Propiedad de la suma**: el límite de la suma es la suma de los límites.

$$\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

- **Propiedad de la resta**: el límite de la resta es la resta de los límites.

$$\lim_{x\to a}[f(x) - g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} g(x)$$

- **Propiedad del producto**: el límite del producto es el producto de los límites.

$$\lim_{x\to a}[f(x) \cdot g(x)] = \lim_{x\to a} f(x) \cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

- **Propiedad de la función constante**: el límite de una función constante es esta misma constante.

$$\operatorname{lím}_{x \to a} k = k$$

- **Propiedad del factor constante**: en un límite de una constante multiplicada por una función se puede sacar la constante del límite sin que se afecte el resultado.

$$\lim_{x\to a}[k \cdot f(x)] = k \cdot \lim_{x\to a} f(x)$$

- **Propiedad del cociente**: el límite de un cociente de dos funciones es el cociente de los límites de las mismas.

$$\lim_{x\to a}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} \;;$$

$$\text{siempre que } \lim_{x\to a} g(x) \neq 0$$

- **Propiedad de la función potencial**: el límite de una función potencial es la potencia del límite de la base elevado al exponente:

$$\lim_{x\to a}[f(x)^k] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^k$$

- **Propiedad de la función exponencial**: el límite de una función exponencial es la potencia de la base elevada al límite de la función exponente:

$$\lim_{x\to a}\left[k^{g(x)}\right] = k^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

- **Propiedad de la función potencial exponencial**: el límite de una función potencial exponencial, es la potencia de los límites de las dos funciones:

$$\lim_{x\to a}\left[f(x)^{g(x)}\right] = \left[\lim_{x\to a} f(x)\right]^{\lim\limits_{x\to a} g(x)}$$

- **Propiedad de la raíz**: el límite de una raíz, es la raíz del límite:

$$\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim_{x\to a} f(x)}$$

si el índice n es par, debe ser $\lim\limits_{x\to a} f(x) > 0$

- **Propiedad de la función logarítmica**: El límite del logaritmo es el logaritmo del límite.

$$\lim_{x\to a}\left[log_k f(x)\right] = log_k\left[\lim_{x\to a} f(x)\right]$$

Límites infinitos

Se dice que existe **límite infinito**cuando la función *f(x)* llega a valores que crecen continuamente, es decir que se puede hacer la función tan grande como queramos. Se dice que *f(x)*diverge a infinito. Para ello, el valor al que tienda la variable independiente *x*puede ser tanto a un número finito, como tender al infinito (límites al infinito).

Veamos un caso, con un **límite infinito** en la siguiente función:

$$f(x) = \frac{1}{(x-2)^2}$$

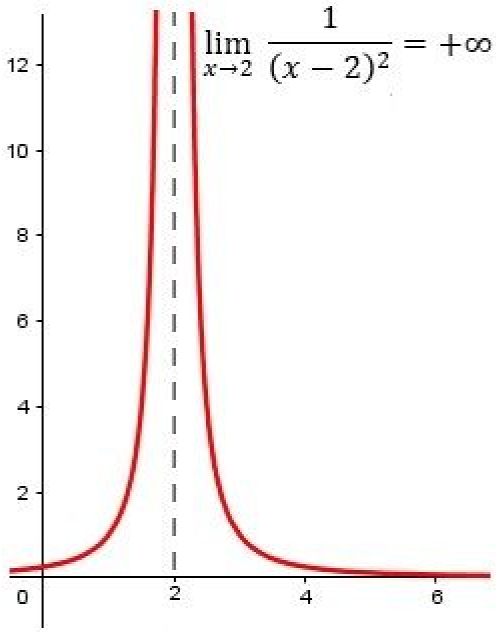
Su límite cuando la variable tiende a 2 es:

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{(x-2)^2} = +\infty$$

Se puede comprobar si damos valores a la *x* cada vez más cercanos a 2, tanto acercándonos por su izquierda como por su derecha, como se ve en el siguiente cuadro, el límite tiende a +∞:

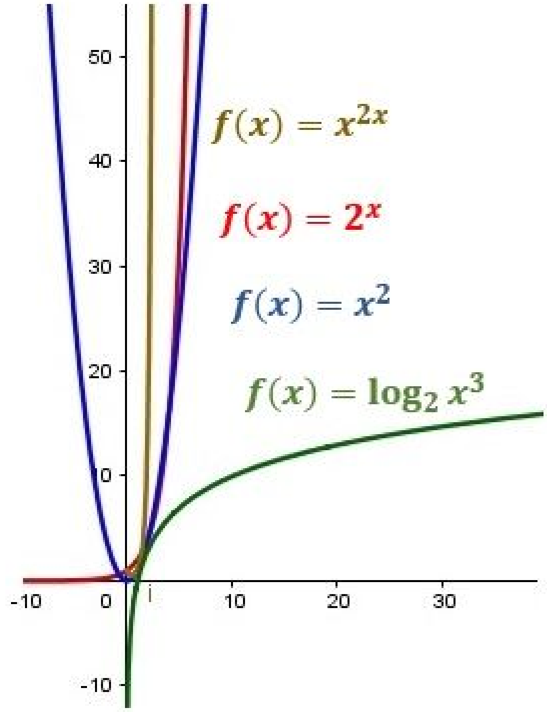
x		*f(x)*
-2,1000	2,1000	1×10^2
-2,0100	2,0100	1×10^4
-2,0010	2,0010	1×10^6
-2,0001	2,0001	1×10^8

Visto en esta gráfica:



Unas funciones con un **límite infinito** pueden crecer más rápidamente que otras, conforme la variable *x* se acerca al valor del límite. Decimos que hay diferentes **órdenes de infinito**, según su rapidez en acercarse a él.

Comparación de órdenes de infinito en infinitos fundamentales, ordenados de mayor a menor. Para eso, veamos estas gráficas:



Sus órdenes de infinito, de mayor a menor:

$$\text{Órdenes de infinito}$$
$$x^{2x} \gg 2^x \gg x^2 \gg \log_2 x^3$$

Pondremos ahora las denominaciones de las funciones fundamentales, ordenadas.

Potencial exponencial > exponencial > potencial > logarítmica.

O, lo que es lo mismo:

$$f(x)^{g(x)} > k^{f(x)} > f(x)^k > \log_a f(x)$$

Una función *f(x)* puede tener un **límite infinito** cuando la función *f(x)*llega a valores que crecen continuamente, es decir que se puede hacer la función tan grande como queramos. Se dice entonces que *f(x)*diverge a infinito. Esto puede ocurrir cuando la variable *x* tienda a un valor finito *a* o también cuando *x* tienda al infinito. Veamos los tipos que se pueden presentar.

Límites al infinito

Un **límite al infinito** es aquel al que tiende *f(x)* cuando la variable *x* se hace tan grande, tanto en positivo como en negativo, como queramos. Entonces la función *f(x)* puede tender a un valor finito o puede diverger a infinito (**límite infinito**).

Veamos un caso, con un **límite al infinito** en la siguiente función:

$$f(x) = x^{\frac{1}{x}}$$

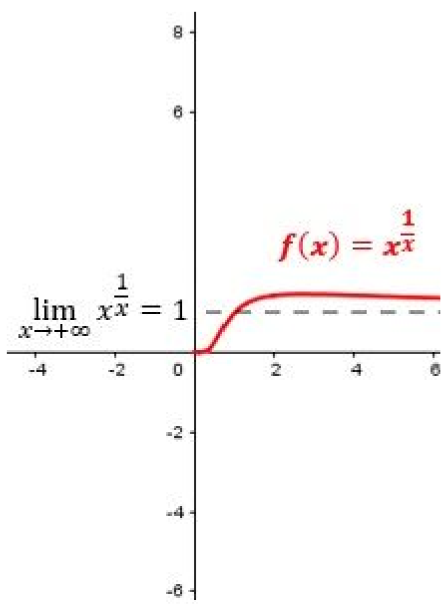
Su límite cuando la variable tiende a 2 es:

$$\lim_{x \to +\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1$$

Se puede comprobar si damos valores a la *x* cada vez más cercanos a +∞. Como se ve en el siguiente cuadro, el límite tiende a 1:

x	*f(x)*
10	1,2589
100	1,0471
1.000	1,0069
10.000	1,0009

Visto en esta gráfica:



Operaciones con límites

Vamos a ver **operaciones con los límites** de dos funciones *f(x)* y *g(x)*, que estén definidas sobre el mismo intervalo en los números reales. Y sobre el mismo valor al que tiende la variable *x*.

El valor al que tiende *x* puede ser un número real o ±∞ (límites al infinito).

Igualmente ocurre con el valor del límite. Que sea un número real o ±∞(límites infinitos).

Para operar con los límites de las dos funciones *f* y *g*, han de tenerse en cuenta las **propiedades de los límites**.

Conocer los siguientes casos que se muestran en esta tabla resulta útil para resolver **operaciones con límites**, siempre que en alguno de sus valores intervengan 0 o ∞. (Estos casos, especialmente cuando interviene ∞, debe tenerse en cuenta que no son lo que se define como una **operación matemática**. Son ayudas para averiguar el valor del límite).

$\lim_{x \to a} f(x)$	$\lim_{x \to a} g(x)$	
∞	∞	$\pm\infty + (\pm\infty) = \pm\infty$
		$\infty \cdot \infty = \infty$
		∞^{∞}
k		$k \pm \infty = \pm\infty$
		$\pm k \cdot \infty = \pm\infty \ (si\ k \neq 0)$
		$\frac{k}{\infty} = 0$
		$\frac{+\infty}{k} = +\infty \ (si\ k > 0)$
		$\frac{-\infty}{k} = -\infty \ (si\ k > 0)$
		$\frac{+\infty}{k} = -\infty \ (si\ k < 0)$
		$\frac{-\infty}{k} = +\infty \ (si\ k < 0)$
		$k^{+\infty} = +\infty \ (si\ k > 1)$
		$k^{+\infty} = 0^{+} \ (0 < k < 1)$
		$k^{-\infty} = 0^{+} \ (si\ k > 1)$
		$k^{-\infty} = +\infty \ (0 < k < 1)$
		$\pm\infty^{k} = +\infty \ (si\ k\ es\ par\ y\ k > 1)$
		$\pm\infty^{k} = \pm\infty \ (si\ k\ es\ impar\ y\ k > 1)$
		$\pm\infty^{k} = 0 \ (si\ k < 0)$
	0	$\frac{k}{0} = \pm\infty \ (o\ L \to \nexists)$
		$0^{k} = 0 \ (si\ k > 0)$
		$0^{k} = \infty \ (si\ k < 0)$
		$k^{0} = 1$
		$0^{k} = 0 \ \ (si\ k > 0)$
		$0^{k} = +\infty \ (si\ k < 0)$
∞		$\frac{0}{\pm\infty} = 0$
		$\frac{\pm\infty}{0} = \pm\infty$
		$0^{\infty} = 0$

Cuando una de esas operaciones contenidas en la tabla da como resultado una de las **indeterminaciones**, no hay que interpretar que el límite no exista, sino que habrá que hacer una serie de transformaciones adicionales para averiguar (si es que existe) el valor del límite.

<table>
<tr><th>$\lim_{x \to a} f(x)$</th><th>$\lim_{x \to a} g(x)$</th><th>INDETER.</th></tr>
<tr><td rowspan="2">∞</td><td rowspan="5">∞</td><td>$[\infty - \infty]$</td></tr>
<tr><td>$\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$</td></tr>
<tr><td>1</td><td>$[1^{\infty}]$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">0</td><td>$[0 \cdot \infty]$</td></tr>
<tr><td>$[\infty^{0}]$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">0</td><td>$\left[\frac{0}{0}\right]$</td></tr>
<tr><td>$[0^{0}]$</td></tr>
</table>

Tipos de límites

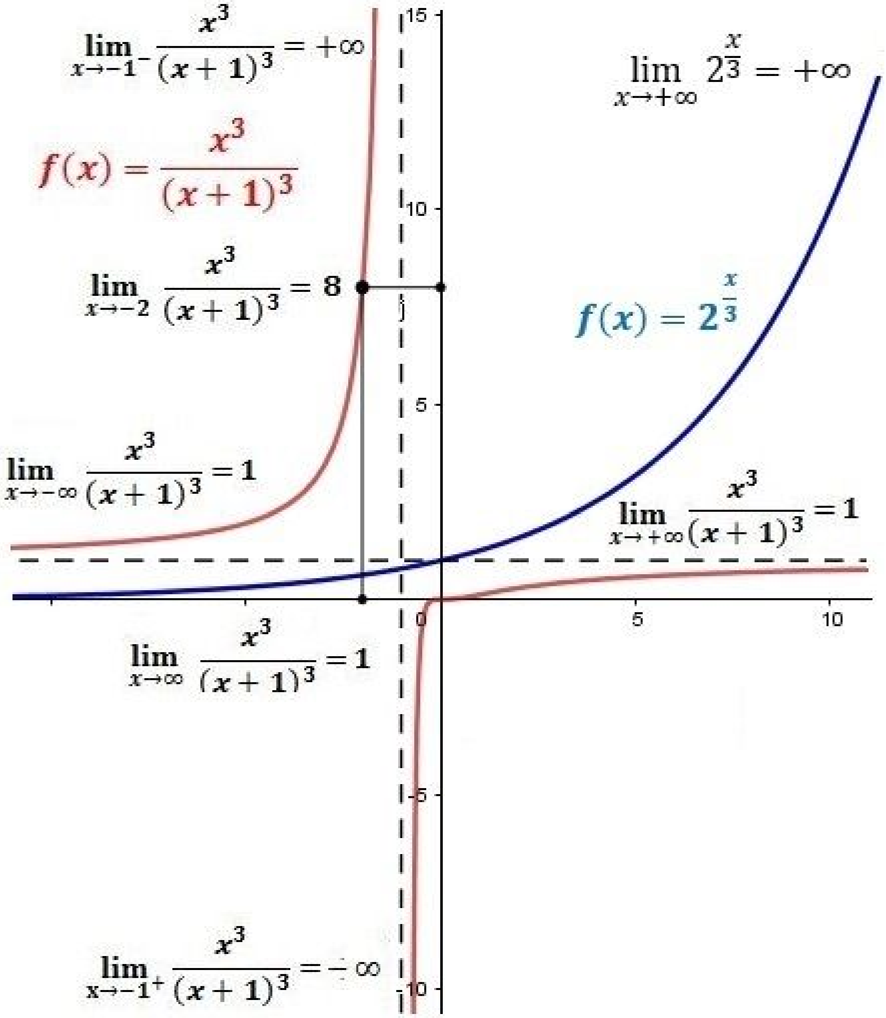
Conocida la noción matemática de límite, se pueden encontrar varios **tipos de límites**, según sea el valor al que tienda la variable independiente *x*de una determinada función o el valor correspondiente que tome su límite.

Las combinaciones se ven en el siguiente cuadro:

<table>
<tr><th colspan="2"></th><th colspan="2">VALOR DEL LÍMITE DE LA FUNCIÓN f(x)</th></tr>
<tr><th colspan="2"></th><th>LÍMITE FINITO</th><th>LÍMITE INFINITO</th></tr>
<tr><th rowspan="2">Valor al que tiende x</th><th>FINITO</th><td>$\lim_{x \to a} f(x) = L$</td><td>$\lim_{x \to a} f(x) = \infty$</td></tr>
<tr><th>INFINITO</th><td>$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$</td><td>$\lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$</td></tr>
</table>

Los dos casos que aparecen en las dos celdas de la última columna de la tabla son límites infinitos, mientras que los dos casos que aparecen en las dos celdas de la última fila son límites al infinito.

Los **tipos de límites** se pueden ver en las gráficas de estas dos funciones:



En la función en rojo está representado el límite cuando *x* tiende a -2, cuyo valor es *L* = 8 (límite finito cuando la variable tiende a un valor finito).

En la misma función en rojo hay un **límite** finito en el infinito. Es decir, un caso de límites al infinito cuando *x*tiende a infinito. Aquí coinciden sus límites laterales, tanto el límite por la izquierda como su límite por la derecha. Su valor de límite es un número finito, es 1 (relacionado con las asíntotas horizontales).

Sin embargo, en la misma funciónhay un caso cuando *x* tiende a -1. Aquí los **límites laterales** no coinciden. El límite por la izquierda es +∞, mientras que su límite por la derecha es -∞. Por tanto, no existe el límite en la función cuando *x* tiende a -1 (relacionado con las asíntotas verticales).

En la función de color azul, su límite cuando *x* tiende a +∞ toma el valor de +∞. Es un caso de **límite infinito** en un límite al infinito.

Cálculo de límites

En el **cálculo de límites**, hay que tener en primer lugar las propiedades de los límites.

Tenemos a continuación una tabla con operaciones cuando el cálculo se efectúa con valores de **límites** de ∞ o con un número, incluido el 0. Estos cálculos son sobre el valor del límite, no se trata de operaciones con números, porque ∞ no lo es. Cuando los signos son evidentes, se omiten. (En las líneas con dos ±, debe entenderse que o se usa el + en los dos casos o el – también en ambos).

$\lim_{x\to a} f(x)$	$\lim_{x\to a} g(x)$	
∞	∞	$\pm\infty + (\pm\infty) = \pm\infty$
		$\infty \cdot \infty = \infty$
		$\infty^{\infty} = \infty$
		$\pm k \cdot \infty = \pm\infty \ (si\, k \neq 0)$
k		$\frac{k}{\infty} = 0$
		$\frac{\infty}{k} = \infty$
		$k^{\infty} = \infty \ (si\, k > 1)$
		$k^{\infty} = 0 \ (si\, 1 > k > 0)$
	0	$\frac{0}{k} = 0$
		$\frac{k}{0} = \infty$
		$k^{0} = 1$
		$0^{k} = 0 \ (si\, k > 0)$
		$0^{k} = \infty \ (si\, k < 0)$
∞		$\frac{0}{\infty} = 0$
		$\frac{\infty}{0} = 0$
		$0^{\infty} = 0$

El primer paso para intentar resolver un límite cuando la variable *x*tiende al valor *a* consiste en substituir directamente la variable *x* por el valor del límite *a*. Entonces ver el resultado, sin otra consideración.

Es decir, que en una función de tipo usual, como en una función continua, y está definida en el entorno del límite *a*, lo esperable es que directamente sea:

$$\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$$

Como es este caso:

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^3 - 2x^2 - 8}{2^x} = \frac{3\cdot \mathbf{2}^3 - 2\cdot \mathbf{2}^2 - 8}{2^{\mathbf{2}}} = \frac{8}{4} = 2$$

En cambio, no existe este límite:

$$\lim_{x\to -3} \sqrt{3x}$$

Y es que la función no está definida en el entorno de -3, porque -3 no está en el campo de existencia de la función, el cual está restringido al subconjunto de los reales positivos.

Si en esa substitución se llega a un caso de **indeterminación**, se tratará de resolver según el tipo de indeterminación de que se trate.

Una técnica muy potente para resolver determinadas indeterminación> es la **regla de L'Hôpital**.

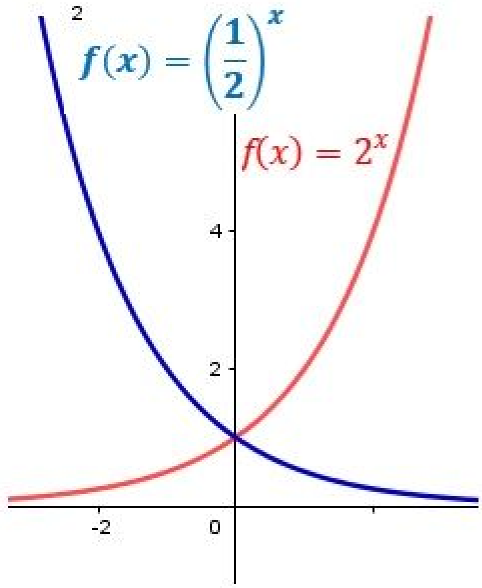
Límite de funciones exponenciales

Para ver el **límite de funciones exponenciales**, veamos primero este tipo de funciones.

Una función exponencial es del tipo: $f(x) = k^x$, siendo *k* un número positivo diferente de 1.

La variable de la función está en el exponente.

Si *k* és mayor que 1 ($k > 1$), la función exponencial es continua y estrictamente creciente en el dominiode los números reales. Si, por el contrario, *k* és menor que 1 ($k < 1$), la función es estrictamente decreciente.



Podemos decir que los límites notables de estas funciones exponenciales son:

- Para $k > 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} k^x = +\infty$$
$$\lim_{x \to -\infty} k^x = k^{-\infty} = \frac{1}{k^\infty} = 0$$
$$\lim_{x \to 0} k^x = 1$$

- Para $0 < k < 1$:

$$\lim_{x \to -\infty} k^x = +\infty$$
$$\lim_{x \to +\infty} k^x = k^{+\infty} = 0$$
$$\lim_{x \to 0} k^x = 1$$

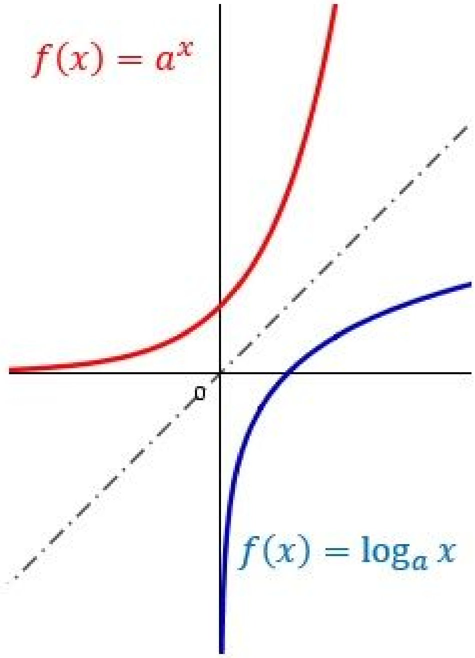
Límite de funciones logarítmicas

Para ver el **límite de funciones logarítmicas**, veamos primero este tipo de funciones.

Una **función logarítmica** es del tipo: $f(x) = log_a x$. Se verifica que:

$$a^{\log_a x} = x$$

Es la función inversa a la función exponencial a^x. Por eso, sus gráficas son simétricas:



La función logarítmica es continuay estrictamente creciente en el dominiode los números reales positivos, el intervalo (0, +∞). Su codominio son los números reales (-∞, +∞).

Podemos decir que límites notables de estas funciones logarítmicas son:

$$\lim_{x \to 0^+} \log_a x = -\infty$$
$$\lim_{x \to 1} \log_a x = 0$$
$$\lim_{x \to a} \log_a x = 1$$
$$\lim_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$$

Límites indeterminados (indeterminaciones)

Los límites indeterminados (o **indeterminaciones**) no indican que el límite no exista, sino que no se puede anticipar el resultado.

Se tendrán que hacer operaciones adicionales para eliminar la indeterminación y averiguar entonces el valor del límite (en el caso de que exista). Ese valor puede ser un número finito, incluido el cero, o +∞ o bien -∞.

Aparecen **indeterminaciones**cuando, al sustituir la variable (*x*) de la expresión por el valor del límite al que tiende ésta, se convierte en uno de los casos siguientes:

$$\frac{\infty}{\infty},\ \frac{0}{0},\ \infty - \infty,\ 0 \cdot \infty,\ 1^{\infty},\ \infty^{0},\ 0^{0}$$

Pero no serán **indeterminaciones**cuando, al realizar la sustitución mencionada de la variable por el valor de su límite, aparecen resultados como estos, siendo *m* un valor finito diferente de cero:

$$\frac{\infty}{m}=\pm\infty \;,\quad \frac{m}{\infty}=0\,,\quad \frac{0}{m}=0\,,\; \frac{m}{0}=\pm\infty$$

El siguiente límite, por ejemplo, es indeterminado:

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x+2}=\frac{0}{0}$$

Por el contrario, este límite no tiene indeterminación:

$$\lim_{x\to-2}\frac{x^2-4}{x-2}=\frac{0}{-4}=0$$

Límites indeterminados infinito partido por infinito

La **indeterminación ∞ / ∞** se puede resolver dividiendo el numerador y el denominador por el mayor grado de la variable.

Pueden haber tres casos de este tipo de límites indeterminados:

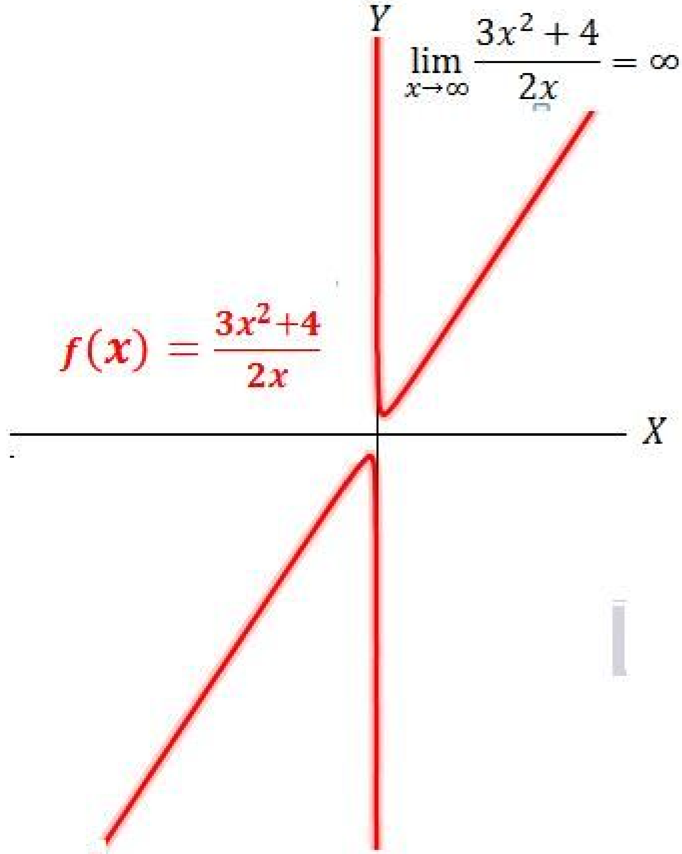
1. Que el mayor grado en el **numerador** sea **mayor** que el mayor grado del **denominador**. En este caso, el límite es o +∞ o -∞.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{3x^2+4}{2x}=\left[\frac{\infty}{\infty}\right]\ \text{INDET.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{3x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}{\frac{2x}{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{3+\frac{4}{x^2}}{\frac{2}{x}}=$$

$$=\frac{3}{0}=\infty$$

Como se ve en la imagen:

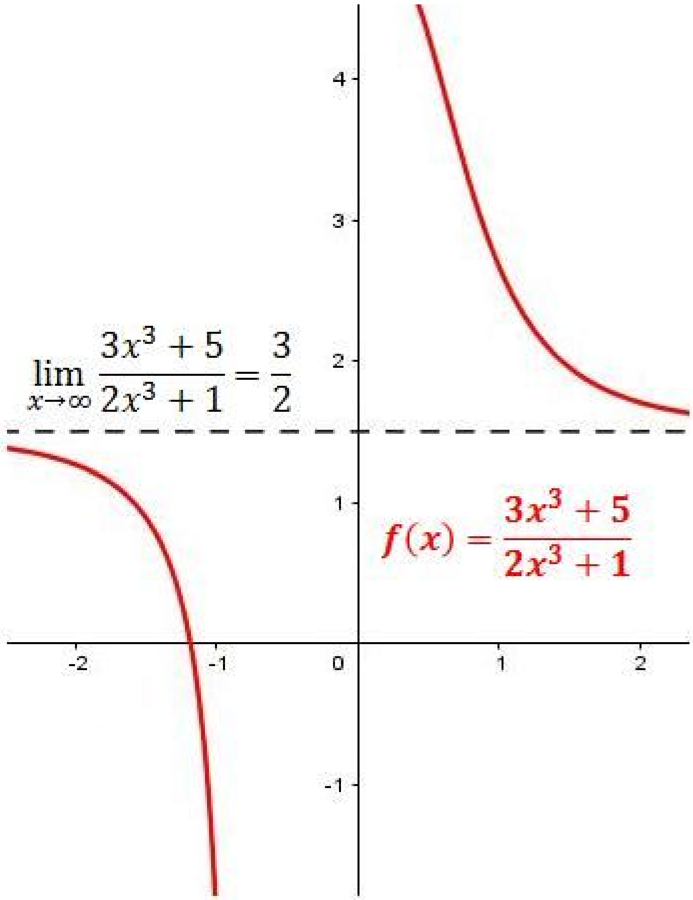


2. Que el mayor grado en el **numerador** sea **igual** que el del **denominador**. La solución es el cociente entre los coeficientes de los términos de mayor grado del numerador y del denominador:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3x^3+5}{2x^3+1} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \text{INDET.}$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{3\frac{x^3}{x^3}+\frac{5}{x^3}}{2\frac{x^3}{x^3}+\frac{1}{x^3}} = \lim_{x\to\infty} \frac{3+\frac{5}{x^3}}{2+\frac{1}{x^3}} = \frac{3}{2}$$

Como se ve en la imagen:



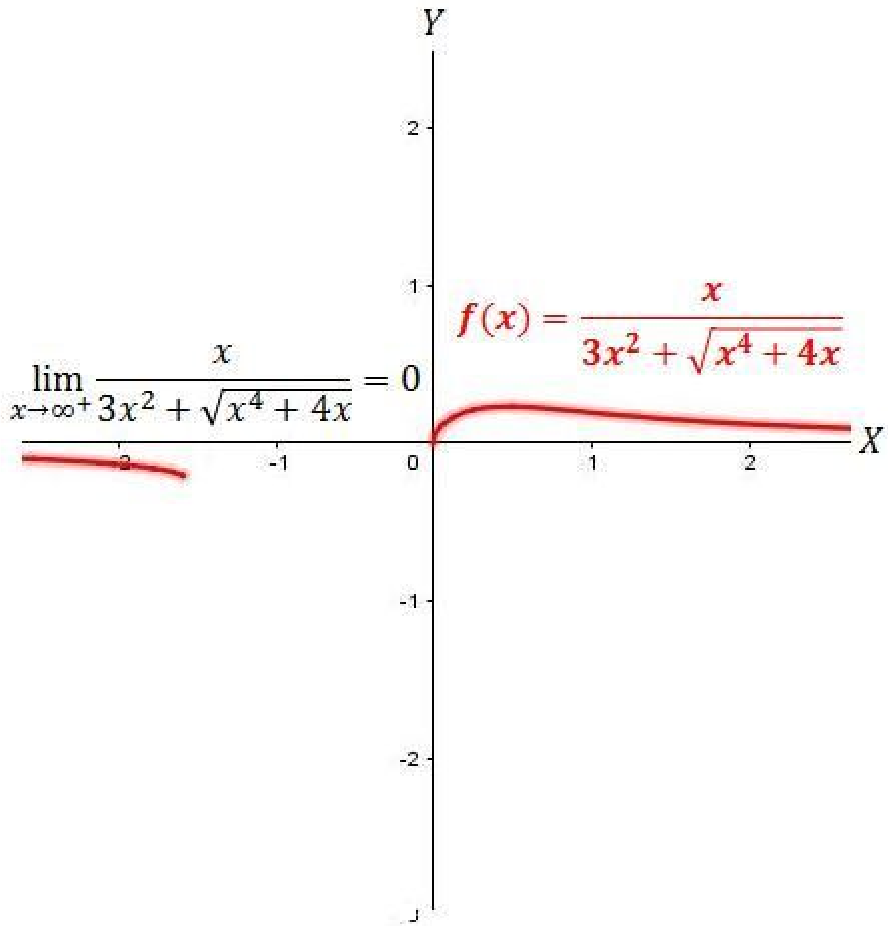
3. El tercer caso es que el mayor grado en el **numerador** sea **menor** que el del **denominador**. En este caso, el límite es cero.

$$\lim_{x\to\infty^+} \frac{x}{3x^2+\sqrt{x^4+4x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\lim_{x\to\infty^+} \frac{\frac{x}{x^2}}{\frac{3x^2}{x^2}+\sqrt{\frac{x^4}{x^4}+\frac{4x}{x^4}}} =$$

$$= \frac{\frac{1}{x}}{3+\sqrt{1+\frac{4}{x^3}}} = \frac{0}{3+1} = 0$$

Como se ve en la imagen:



Los límites indeterminados del siguiente tipo requieren la aplicación de la **regla de L'Hôpital**.

Límites indeterminados infininito menos infinito

En los **límites indeterminados del tipo ∞ – ∞** suelen ser del tipo $f(x) - g(x)$, es decir, la resta de dos funciones.

Tratamos de ver si uno de los términos infinitos es de un orden mayor.

Una potencia de mayor exponente será el término mayor ($x^4 > x^2$).

El término mayor de un polinomio es mayor que un logaritmo ($x^2 > \ln x^3$).

Entre dos funciones exponenciales, la mayor será la que lo sea su base ($5^x > 4^x$).

Por tanto, si en una indeterminación ∞ – ∞ uno de los dos términos es de orden mayor, el límite será ± ∞ (el signo lo determinará si el término de orden mayor es el minuendo o el sustraendo.

Veámoslo en los casos anteriores:

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - x^4) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}(x^2 - \ln x^3) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\infty}(4^x - 5^x) = -\infty$$

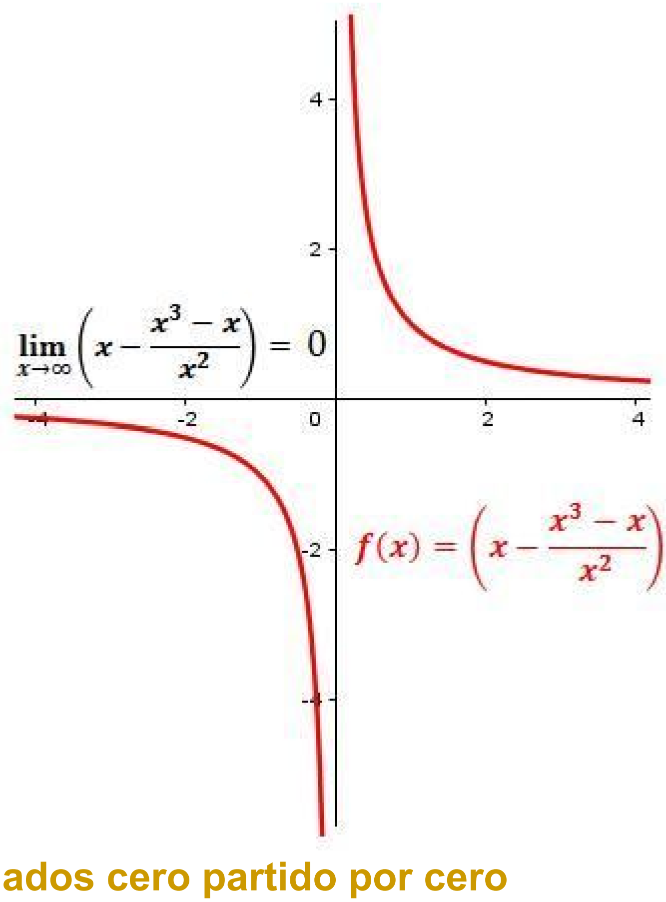
Pero si el orden de los dos términos fuera el mismo, habría que realizar otro procedimiento.

Veamos un ejemplo con términos del mismo orden (en este caso el orden es 1). Reducimos a común denominador y simplificamos:

$$\lim_{x\to\infty}\left(x - \frac{x^3 - x}{x^2}\right) = [\infty - \infty] \quad \text{INDET.}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[\frac{x^3 - (x^3 - x)}{x^2}\right] = \lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{1}{x} = 0$$

Como se ve en la figura, el límite es 0, tanto si la *x* tiende a +∞ como si tiende a -∞.



Límites indeterminados cero partido por cero

Los **límites indeterminados cero partido por cero** en funciones racionales se pueden resolver descomponiendo en factores y simplificando. También, especialmente cuando hay raíces, multiplicando y dividiendo por el binomio conjugado del término que tenga la raíz.

Veamos los dos casos:

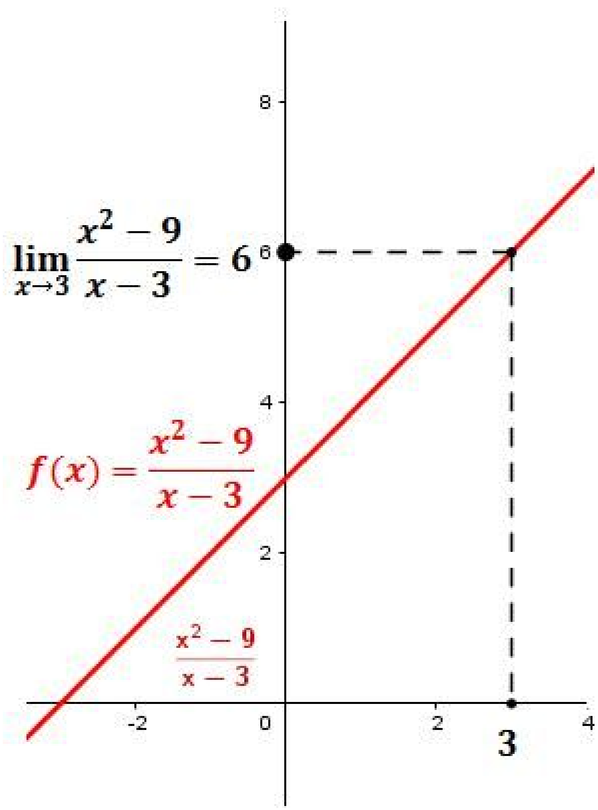
El límite de una fracción de funciones racionales que dé una indeterminación del tipo **0/0** se resolverá descomponiendo en factores el numerador y el denominador. Después, simplificar y resolver:

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\left[\frac{0}{0}\right]\ \text{INDET.}$$

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x-3}=\lim_{x\to 3}\frac{(x+3)(x-3)}{x-3}=$$

$$=\lim_{x\to 3}(x+3)=6$$

Como se ve en la figura:



Límites indeterminados constante partido por cero

Un número real dividido por cero en aritmética es una operación que no arroja un resultado definido. En cambio, en cálculo, si el límite de una expresión llega a un número entre cero (*k* / 0), tendremos un caso que podríamos calificar como indeterminación que sí que podría ser resuelta.

Ese límite puede ser +∞, -∞ o, simplemente, no existir un límite.

Veremos en los ejemplos expuestos, que en los límites en los que se llega a *k* / 0 (donde *k* es una constante), el valor al que tiende la *x* no existe en el dominio de la función. La función no está definida en ese punto.

La operativa es comprobar los **límites laterales**. Si nos acercamos mucho al límite por la izquierda, y, a su vez, al límite por la derecha, veremos que en el numerador tenemos un número, positivo o negativo y en el denominador un número cada vez más próximo a cero, que puede también ser positivo o negativo. Según los signos el resultado de ambos límites lateralespuede ser +∞ o -∞. Si ambos límites laterales coinciden, el límite existe (esta es una condición necesaria para la **existencia de cualquier límite** en un punto).

Al contrario, si uno de los límites laterales da +∞ y el otro -∞, el límite no existe.

Este último sería el caso de las asíntotas verticales divergentes.

Límites indeterminados cero por infinito

Usualmente ocurren en el producto de funciones del tipo:

$$\lim_{x \to a}\left(f(x)g(x)\right) = [0 \cdot \infty]$$

Habitualmente, pueden resolverse operando, factorizando, simplificando y resolviendo.

$$\lim_{x \to -1}\left[(x^2 - 3x - 4)\left(\frac{1}{x+1}\right)\right] = [0 \cdot \infty]$$

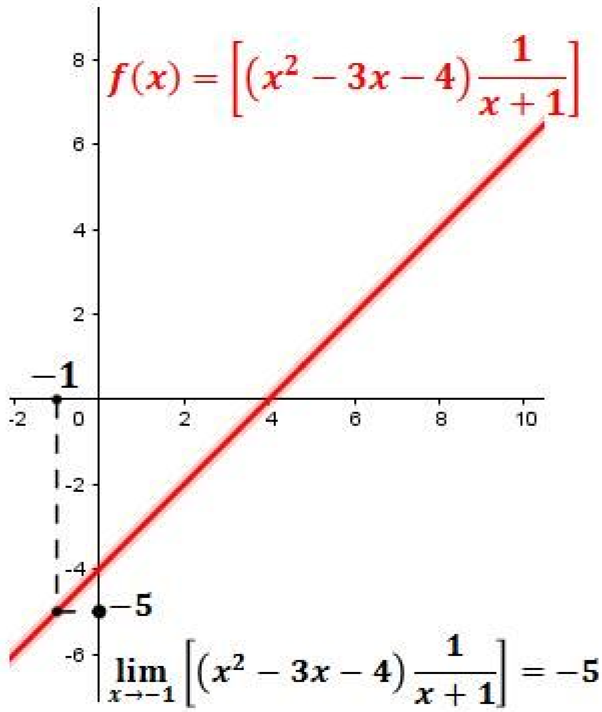
Las raíces del primer polinomio son (+4, -1).

Operamos:

$$\lim_{x\to -1}\left[(x-4)(x+1)\left(\frac{1}{x+1}\right)\right]=\lim_{x\to -1}(x-4)=$$

$$=-1-4=-5$$

Como se ve en la figura:



Límites indeterminados uno elevado a infinito

Se refieren a casos de función potencial exponencial, donde tanto la base como el exponente son funciones. En general, los límites exponenciales indeterminados de los tres tipos, 1^{∞}, ∞^{0}y 0^{0}, que se resuelven aplicando en primer lugar esta transformación:

$$f=e^{lnf}$$

Puesto que la potencia y el logaritmo de la misma base que la potencia se anulan entre sí por ser funciones inversas.

En cualquier límite exponencial indeterminado, según lo que se acaba de decir, podemos hacer:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}=e^{ln\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}}$$

Por una de las propiedades de los límites: *el límite de un logaritmo es el logaritmo del límite*:

$$e^{ln \lim_{x \to a} f(x)^{g(x)}} = e^{\lim_{x \to a} ln\, f(x)^{g(x)}}$$

Por una de las propiedades de los logaritmos, *el logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base*:

$$e^{\lim_{x \to a} ln\, f(x)^{g(x)}} = e^{\lim_{x \to a} g(x) ln\, f(x)} = e^{L}$$

Por comodidad, podemos llamar al límite del exponente de este tipo de expresiones: *L*. Como se ha dicho, la transformación descrita es aplicable a los tres tipos de límites exponenciales indeterminados.

La transformación, a la que llamaremos (1), queda:

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a} g(x) ln\, f(x)} = e^{L} \quad (1)$$

Los **límites indeterminados del tipo 1$^{\infty}$** son los límites exponenciales en los que la base tiende a 1 y el exponente tiende a ∞.

Son de los llamados **límites del tipo *e***.

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} \quad \begin{cases} \lim_{x \to a} f(x) = 1 \\ \\ \lim_{x \to a} g(x) = \infty \end{cases}$$

Para resolver límites indeterminados, en concreto del tipo **1$^{\infty}$**, se puede aplicar la propiedad siguiente:

$$\lim_{x \to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x \to a} [f(x)-1] g(x)}$$

Retengamos esta propiedad, porque es muy útil para resolver estos límites exponenciales.

Límites indeterminados infinito elevado a cero

Se refieren a casos de **función potencial exponencial**, donde tanto la base como el exponente son funciones. En general, los límites exponenciales indeterminados de los tres tipos, 1^{∞}, ∞^{0}y 0^{0} se resuelven aplicando en primer lugar esta transformación (1):

$$f = e^{lnf}$$

Se verifica, puesto que la potencia y el logaritmo de la misma base que la potencia se anulan entre sí por ser funciones inversas.

En cualquier límite exponencial indeterminado, por tanto, podemos hacer:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{ln \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}}$$

Por una de las propiedades de los límites, *el límite de un logaritmo es el logaritmo del límite*:

$$e^{ln \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}} = e^{\lim_{x\to a} ln\, f(x)^{g(x)}}$$

Por otra de las propiedades de los logaritmos, *el logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base*:

$$e^{\lim_{x\to a} ln\, f(x)^{g(x)}} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\, ln\, f(x)} = e^{L}$$

Por comodidad, podemos llamar al límite del exponente: *L*. Como se ha dicho, la transformación descrita es aplicable a los tres tipos de límites exponenciales indeterminados.

En total, la transformación, que llamaremos (1), queda:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x)\, ln\, f(x)} = e^{L} \quad (1)$$

Límites indeterminados cero elevado a cero

Se refieren a casos de **función potencial exponencial**, donde tanto la base como el exponente son funciones. En general, los límites exponenciales indeterminados son de estos tres tipos: $\mathbf{0^0}$, 1^{∞} y 0^{∞} se resuelven aplicando en primer lugar esta transformación:

$$f = e^{lnf}$$

Se verifica, puesto que la potencia y el logaritmo de la misma base que la potencia se anulan entre sí por ser funciones inversas.

En cualquier límite exponencial indeterminado, por tanto, podemos hacer:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{ln \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}}$$

Por una de las propiedades de los límites: *el límite de un logaritmo es el logaritmo del límite*.

$$e^{\ln \lim_{x\to a} f(x)^{g(x)}} = e^{\lim_{x\to a} \ln f(x)^{g(x)}}$$

Por una de las propiedades de los logaritmos, *el logaritmo de una potencia es igual al exponente multiplicado por el logaritmo de la base*.

$$e^{\lim_{x\to a} \ln f(x)^{g(x)}} = e^{\lim_{x\to a} g(x) \ln f(x)} = e^{L}$$

Por comodidad, podemos llamar al límite del exponente: *L*. Como se ha dicho, la transformación descrita es aplicable a los tres tipos de límites exponenciales indeterminados.

En total, la transformación, que llamaremos (1), queda:

$$\lim_{x\to a} f(x)^{g(x)} = e^{\lim_{x\to a} g(x) \ln f(x)} = e^{L} \quad (1)$$

Regla de l'Hôpital

La **regla de l'Hôpital** sirve para resolver muchos casos de límites que den indeterminación, especialmente los casos más complejos, exponenciales o términos no racionales. Se aplica directamente a límites con indeterminaciones del tipo 0/0 o ∞/∞. Eso no impide que pueda aplicarse a otros casos de límites indeterminados, realizando transformaciones para llegar a una de los tipos anteriores. La regla de l'Hôpital puede aplicarse sucesivamente. Requiere conocer bien la técnica de la **derivación>**.

Aplicación de la regla de L'Hôpital

Si dos funciones *f(x)* y *g(x)* continuas en un intervalo que contiene el punto *a*toman los valores *f(a)* = *g(a)* = 0, se verifica que:

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

Las funciones deben derivarse por separado en el numerador y en el denominador.

Es una indeterminación del tipo 0/0.

Entonces se verifica que:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

Siempre que exista el límite en *a*de *f'/g'* y que *g'(x)* ≠ 0 en cualquier punto del intervalo diferente de *a*. (El que no exista el límite *f'/g'* no excluye que pudiera existir el límite de *f/g*).

El valor del límite en *a* puede ser cualquiera en el intervalo derivable de ambas funciones, incluyendo +∞ y -∞.

La **regla de L'Hôpital** se puede aplicar también directamente a límites laterales y a límites indeterminados del tipo ∞ / ∞ ya que del caso del enunciado inicial se puede hacer la transformación:

$$\lim_{x \to a} \frac{\frac{1}{g(x)}}{\frac{1}{f(x)}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

En los límites que den indeterminaciones exponenciales del tipo 1^{∞}, $0^{0;}$ o ∞^{0}, mediante transformaciones basadas en las propiedades de los límites y de los logaritmos, llegar a una indeterminación cociente 0/0 o ∞/∞ a la que sí que se le podría aplicar la **regla de L'Hôpital**.

Límites de funciones definidas a trozos

Los **límites de las funciones definidas a trozos** requieren conocer en qué consisten este tipo de funciones.

Las funciones definidas a trozos (o función a trozos o función por partes) son aquellas que tienen distintas expresiones o fórmulas dependiendo del intervalo (o trozo) en el que se encuentre la variable independiente (*x*).

Cálculo de límites por funciones equivalentes

Dos funciones *f(x)* y *g(x)* son **equivalentes** en *a* si se cumple la condición:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

Y se escribe así:

$$f \sim g \; en \; a$$

O, dicho de otra manera, el límite de su cociente es 1. (O, también, que ambas funciones deben tener el mismo límite en *a*).

El valor de *a* puede ser cualquier número real o ±∞.

Asíntotas de una función

Una **asíntota de una función** (en el caso de existir esa asíntota) es una recta en el plano tal que una rama de la función *f(x)* que crece infinitamente en el sentido *x*, *f(x)* o en los dos sentidos a la vez, se acerca a la asíntota cada vez más. Dicho de otra manera, una asíntota es la tangente a una rama de la función en el infinito.

Tipos de asíntotas

Una función puede tener **asíntotas horizontales**, **asíntotas verticales**, o **asíntotas oblicuas**. Tambien hay funciones en las que **no existen**asíntotas (en las llamadas “ramas parabólicas”).

Asíntotas horizontales

Una recta es una **asíntota horizontal** de una función *f(x)* si cumple al menos una de las siguientes condiciones (límite finito al infinito):

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = k$$

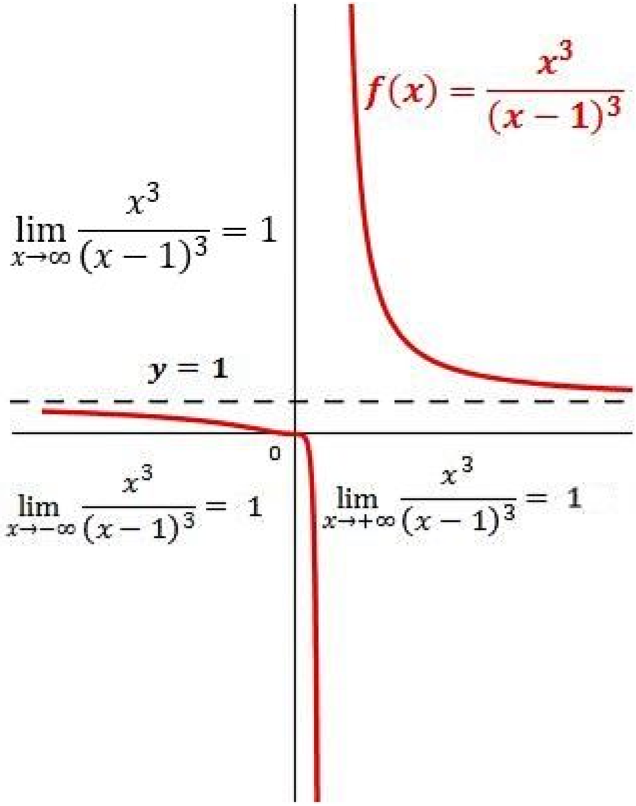
$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = k$$

Como máximo, una función puede tener dos asíntotas horizontales, una a la derecha (límite a +∞) y otra a la izquierda (límite a -∞).

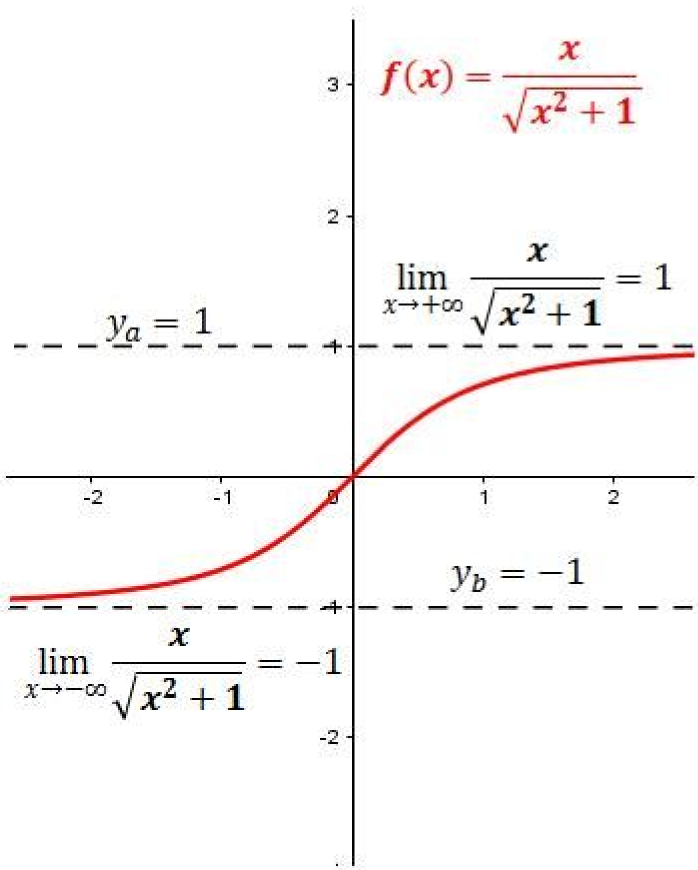
La ecuación de una asíntota horizontal es:

$$y = k$$

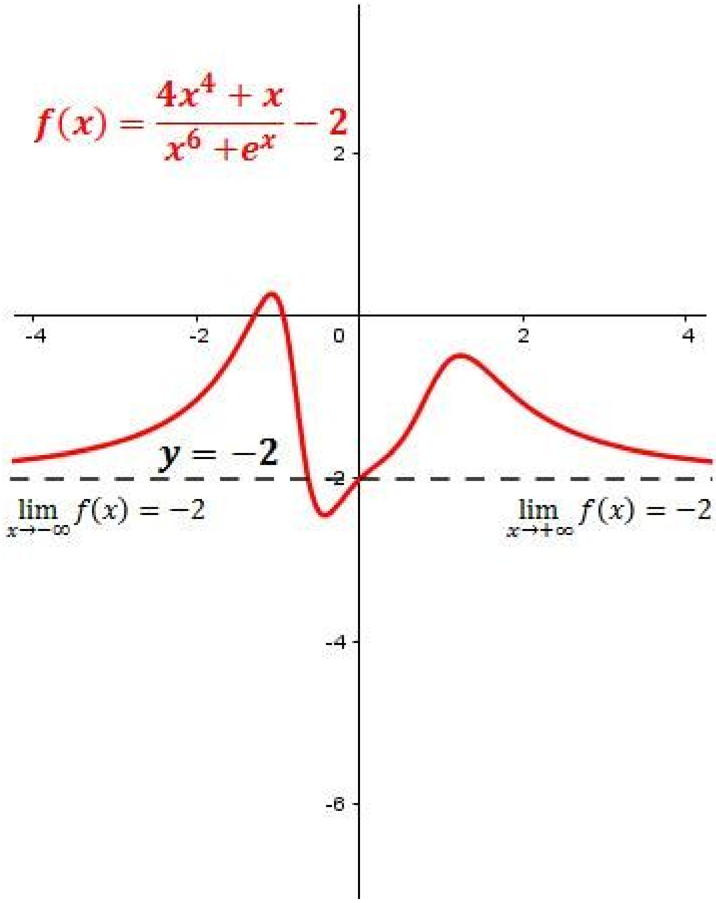
Lo más frecuente es que la misma asíntota sea a la vez la de la de la rama derecha de la función y la de la izquierda. Por ejemplo en esta función racional con única **asíntota horizontal***y* = 1.



Sin embargo, en funciones con radicales pueden aparecer dos asíntotas horizontales diferentes, como en la figura:



En algunos casos, una asíntota horizontal puede cortar a la gráfica de su función en uno o más puntos:



Asíntotas verticales

Una recta es una **asíntota vertical**de una función *f(x)* si cumple al menos una de las cuatro condiciones siguientes:

$$(1)\ \lim_{x\to a^+} f(x)=+\infty$$

$$(2)\ \lim_{x\to a^-} f(x)=+\infty$$

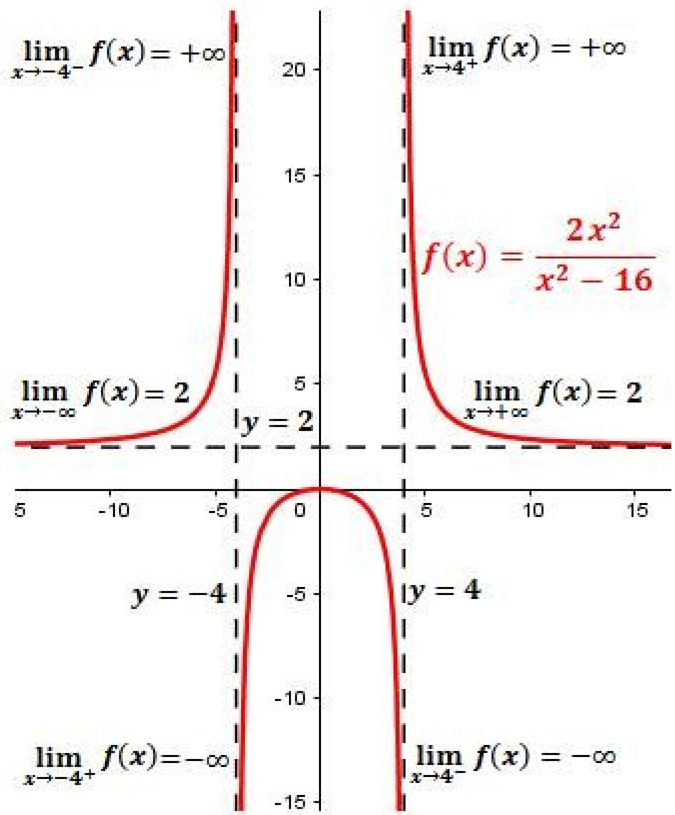
$$(3)\ \lim_{x\to a^+} f(x)=-\infty$$

$$(4)\ \lim_{x\to a^-} f(x)=-\infty$$

Las condiciones (1) y (2) se verifican cuando la recta es una asíntota **hacia arriba**. La gráfica de la función se acerca a ella en el infinito respectivamente por la izquierda o por la derecha.

Las condiciones (3) y (4) se verifican cuando la recta es una asíntota **hacia abajo**. La gráfica de la función se acerca a ella en el infinito respectivamente por la izquierda o por la derecha.

Las condiciones (1) y (2), las (3) y (4), la (1) y la (4) o la (3) y la (4) se pueden verificar simultáneamente. Incluso en una misma función puede haber asíntotas horizontales. En la imagen aparece una función que cumple las cuatro condiciones de una asíntota vertical más una horizontal:



En las funciones racionales, las **asíntotas verticales**, en caso de tenerlas, están en los valores que hacen nulo su denominador.

Asíntotas oblicuas

La **asíntota oblicua** de una función*f(x)* son rectas con ecuación $y = px + q$que existirán si se cumple que hayan, al menos, uno de estos dos límites:

$$(1)\ \lim_{x\to +\infty} [f(x) - (px - q)] = 0$$

$$(2)\ \lim_{x\to -\infty} [f(x) - (px - q)] = 0$$

En el primer caso, se dice que existe **asíntota oblicua por la derecha** (o asíntota oblicua en +∞).

En el segundo caso, se dice que existe **asíntota oblicua por la izquierda** (o asíntota oblicua en -∞).

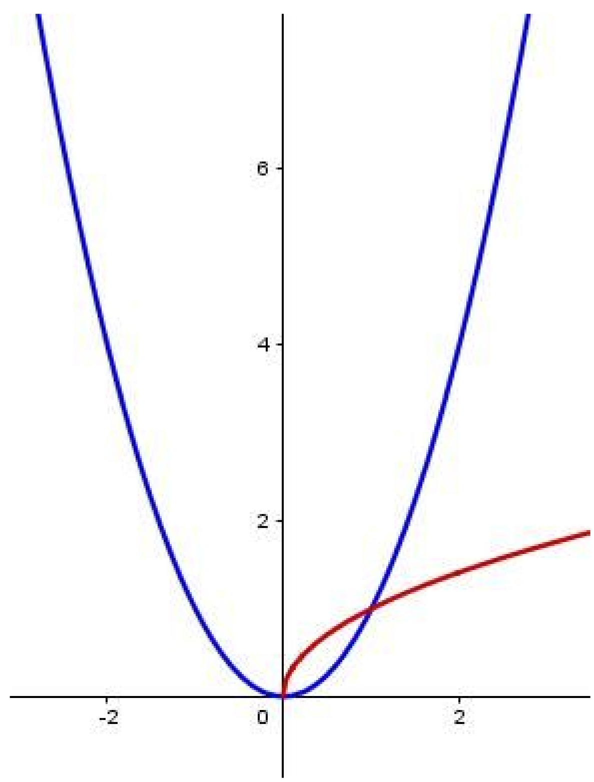
Necesitamos, en cada caso, saber la ecuación de la recta de cada asíntota oblicua. Hay que averiguar el parámetro *p* (pendiente de la recta) y el *q* (punto de corte con el eje de ordenadas).

El cálculo de la **pendiente** *p* se obtiene de uno de estos dos límites:

$$p = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

Dependiendo del valor de *p*obtenido puede ocurrir que.

1. Si *p* es un número real diferente de cero, **existe asíntota oblicua**. Cuando *p* > 0, la pendiente es positiva y la asíntota va en la dirección del primer al tercer cuadrante de los ejes de coordenadas. Si *p* < 0, la pendiente es negativa y la asíntota va en la dirección del segundo al cuarto cuadrante.
2. Si el valor de *p* = ±∞ **no existe asíntota oblicua** y la rama estudiada es del tipo de la parábola vertical.
3. Si el valor de *p* = 0; **no existe asíntota oblicua** y la rama estudiada es del tipo de la parábola horizontal.



Punto de corte de la asíntota con el eje de ordenadas, *q*.

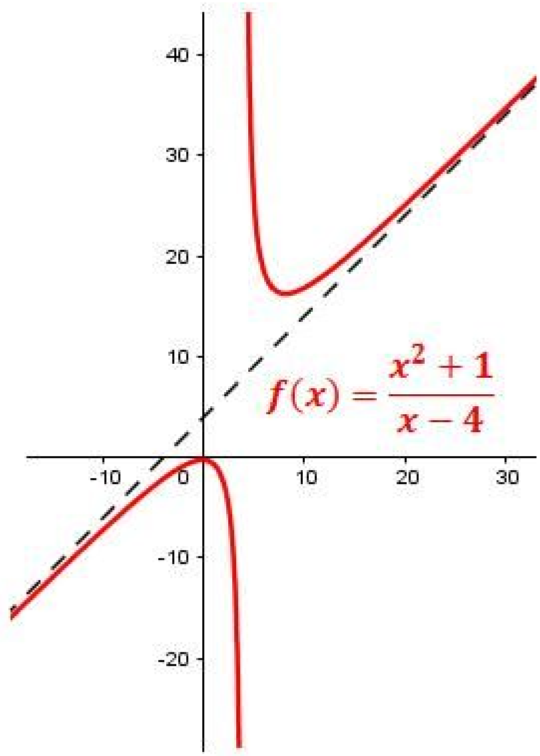
Si *p* calculado anteriormente es un número real diferente de cero, el parámetro *q* se obtiene mediante este límite:

$$q = \lim_{x \to \pm\infty} [f(x) - px]$$

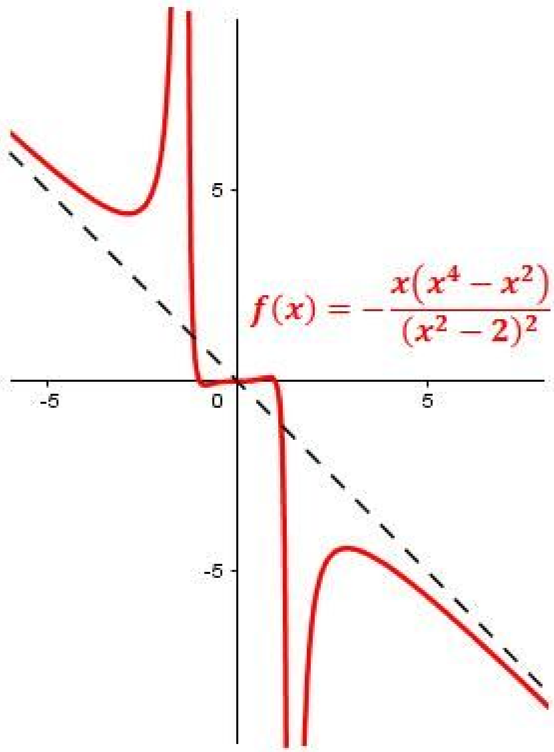
Si este límite es finito, existe la asíntota oblicua. Pero si el límite fuese infinito, no hay asíntota y sí rama parabólica.

Una función no puede tener asíntotas horizontales y, a la vez, oblicuas.

Las funciones polinómicas racionales con asíntota oblicua tienen un grado más en el numerador que en el denominador.



Una asíntota oblicua puede cortar a la gráfica de la función en uno o más puntos.



Límite de una sucesión

El **límite de una sucesión numérica** { a_n } en muchos de los casos existe. Es cuando sus términos van aproximándose a un valor *L*. Y a éste valor se le denomina **límite**.

Los límites de las sucesiones se calculan **siempre en el infinito**.

Aunque no todas las sucesiones tienen límite.

A las sucesiones que tienen límite finito se les denomina **sucesiones convergentes**.

Se escribe:

$$\lim_{n \to \infty} a_n = L$$

El límite de { a_n } es *L*.

Una sucesión { a_n } tiende a un valor numérico *L*, cuando los términos de la sucesión a_n se aproximan a *L* tanto como se desee, para todos los lugares *n*de la sucesión a partir de un lugar arbitrario *N* tan grande como se quiera.

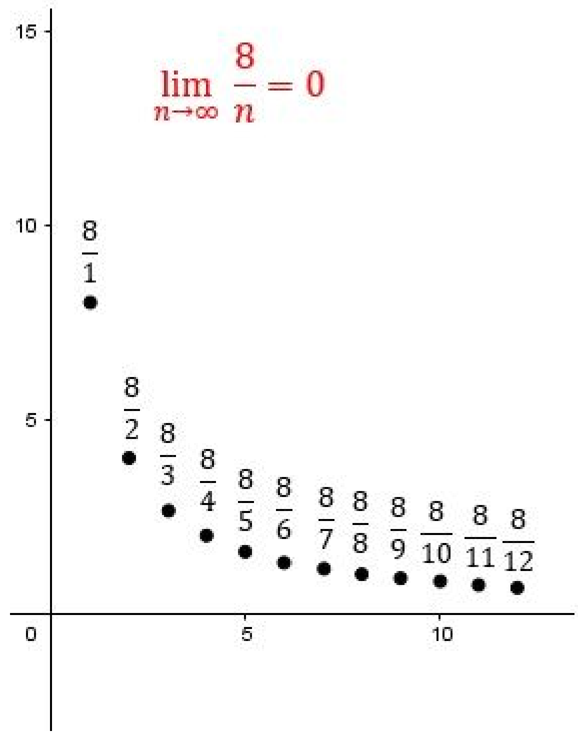
Dicho de otra manera, en una **sucesión numérica** { a_n }, para que *L* sea su límite, a todo $\varepsilon > 0$ debe existir un entero natural *N* tal que si $n \geq N$, entonces $|a_n - L| < \varepsilon$.

Ejemplos de límites de sucesiones convergentes:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$
$$\lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{n} = 1$$
$$\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

Siendo *e* un número irracional, base de los logaritmos neperianos, e importantísimo en matemáticas, cálculo financiero, etc. Sus primeras cifras son, *e* = 2,7182818284…

Esta es una representación gráfica de una sucesión convergente.



Una sucesión divergente tiende al infinito.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\infty$$

La sucesión de los números naturales tiende a +∞.

1, 2, 3, 4,…, 100.000,…

Y la sucesión de los números pares negativos tiende a -∞:

-2, -4, -6, -8, …, -100.000,…

Una **sucesión oscilante** no es convergente ni divergente. Alterna valores positivos y negativos.

Como esta sucesión de los múltiplos de 3 en que se alternan los signos:

$$3, -6, 9, -12, 15, \dots 3n(-1)^{n-1}$$

Propiedades de los límites de las sucesiones

Sean estos los límites de dos sucesiones:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = L$$
$$\lim_{n\to\infty} b_n = L_1$$

Entonces se cumple que:

- Límite de la suma:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = L + L_1$$

- Límite de la resta:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n - b_n) = L - L_1$$
$$\text{si } L - L_1 \neq [\infty - \infty]$$

- Límite del producto:

$$\lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = L \cdot L_1$$
$$\text{si } L \cdot L_1 \neq [0 \cdot \infty]$$
$$\text{si } L \cdot L_1 \neq [\infty \cdot 0]$$

- Límite del cociente:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{b_n}\right) = \frac{L}{L_1}$$
$$\text{si } \frac{L}{L_1} \neq \left[\frac{0}{0}\right]$$
$$\text{si } \frac{L}{L_1} \neq \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

- Límite de una expresión exponencial:

$$\lim_{n\to\infty} {a_n}^{b_n} = L^{L_1}$$
$$\text{si } L^{L_1} \neq [0^0]$$
$$\text{si } L^{L_1} \neq [\infty^0]$$
$$\text{si } L^{L_1} \neq [1^\infty]$$

- Límite de una exponencial:

$$\lim_{n\to\infty} k^{a_n} = k^L$$
$$\text{si } k > 0$$

- Límite del producto por una constante:

$$\lim_{n\to\infty} k \cdot a_n = k \cdot L$$