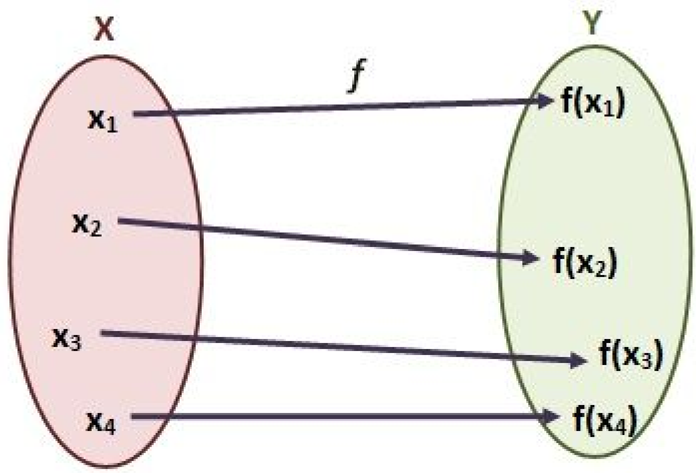
Las **funciones** son reglas que relacionan los elementos de un conjunto con los elementos de un segundo conjunto.

Cuando una magnitud depende de otra, se dice que está en función de ésta.

Una **función** *f* es una relación que asigna a los elementos de un primer conjunto (conjunto inicial *X*) un elemento de un segundo conjunto (conjunto final *Y*). A cada elemento de *X*le corresponde, un y solo un elemento de *Y*.

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y = f(x) \end{aligned}$$



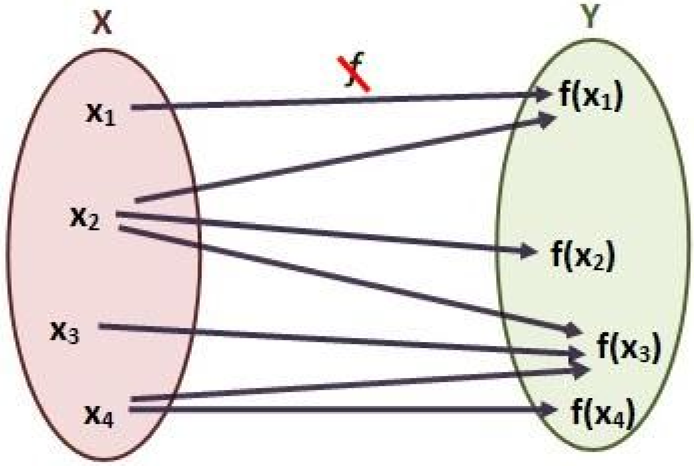
El elemento *x* del primer conjunto es la **variable independiente**. Es un valor que se fija previamente.

La letra *y* es la **variable dependiente** y corresponde a los elementos del conjunto final. Ésta variable depende del valor de la variable independiente *x*.

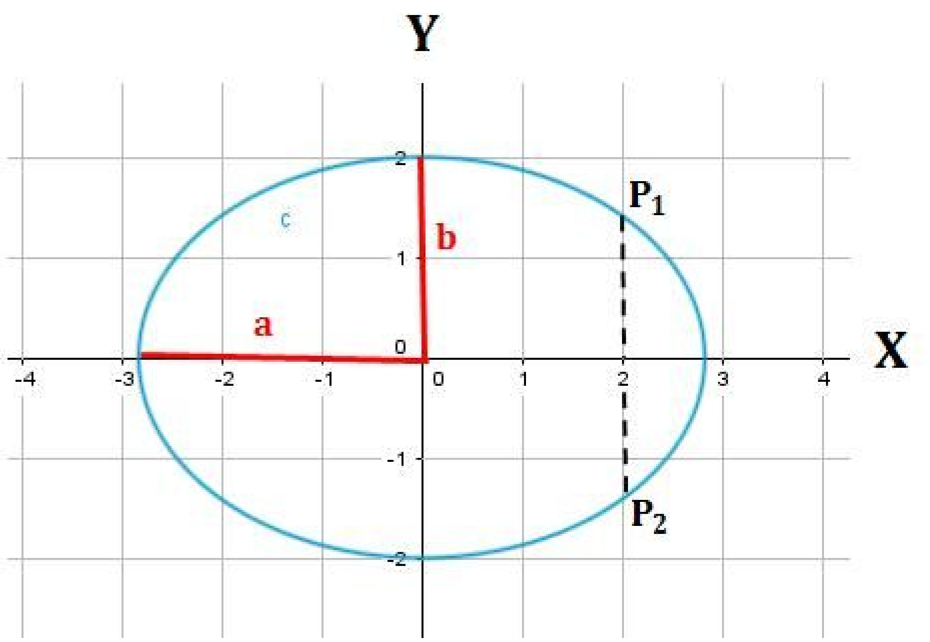
A *f*(*x*) se le denomina **imagen** de *x*, mientras que a *x* se le llama **antiimagen**de *f*(*x*).

¿Qué no es una función?

Si a un valor de la variable *x* le corresponde más de un valor de *y*, entonces no es una función.



Un ejemplo de lo que **no** es una función es cuando asignamos al conjunto de entrada las estaturas y al de salida, los alumnos un colegio. Esto no sería una función, pues podrían haber casos de valores de estaturas que tuviesen varios alumnos.



Otro ejemplo de lo que **no** sería una función: la ecuación de la elipse(para simplificar, centrada en el origen *O*.

Y sabemos que la ecuación de la elipse centrada en *O* es:

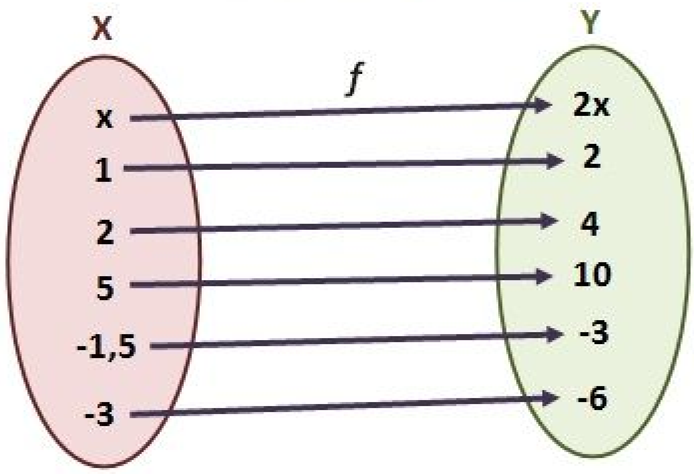
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

Por la imagen y por la ecuación, podemos ver que a valores concretos de *x* les corresponden dos valores de *y*. Por lo tanto, esta ecuación **tampoco** se corresponde con una función.

Ejercicio

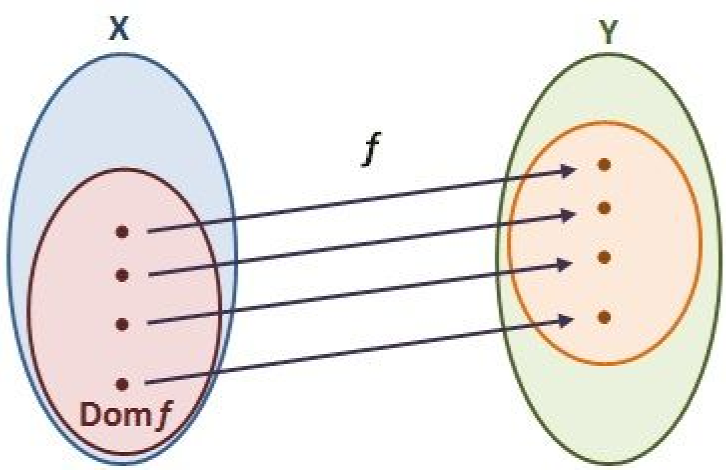
Por ejemplo, una función podría ser hacer corresponder a cada número *x* el doble de dicho número (2*x*).

$$\begin{aligned} f : X &\longrightarrow Y \\ x &\longmapsto y = 2x \end{aligned}$$



Dominio de la función

El **dominio de una función** *f* es el subconjunto **Dom *f*** (o **D**) de elementos que tienen imagen. Es decir, el conjunto de elementos *x* de la variable independiente X que tienen imagen en Y. También se le llama **campo de existencia de la función**.

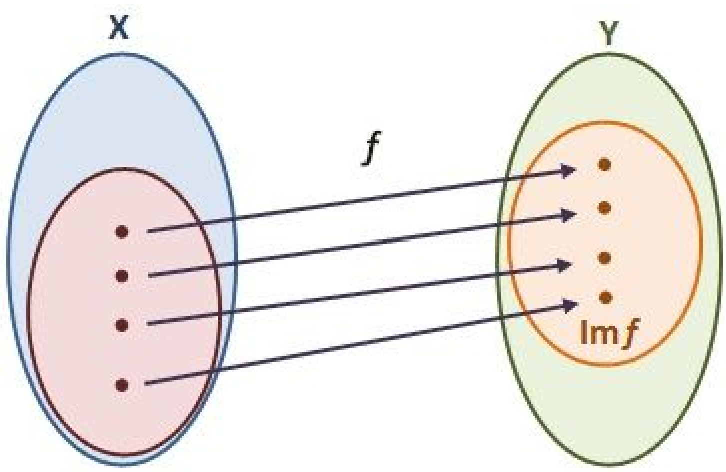


Recorrido de la función

El **recorrido de una función** *f* es el conjunto **Im *f*** (o **Rec *f***) de todos los elementos que toma la variable dependiente. Es decir, el conjunto de todas las imágenes que se obtienen realmente a partir de la función *f*.

También se le llama **rango de una función** o **conjunto de llegada**.

El **codominio** es el conjunto de valores sobre los que se ha definido la función *f*, aunque no todos los elementos del **codominio** sean necesariamente imágenes (es decir, que pertenezcan necesariamente al rango de *f*).



Formalmente se define el **recorrido de una función** como:

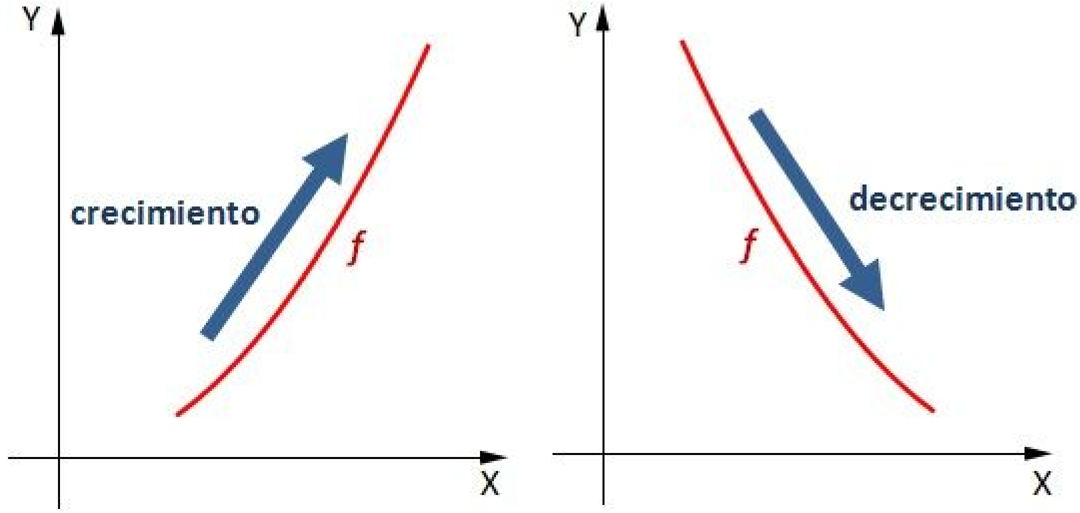
$$Im\ f = \{y \in Y \mid \exists x \in X\ ,\ f(x) = y\}$$

Las funciones en que el recorrido de la función Im *f* es el mismo que el conjunto final *Y* son funciones sobreyectivas.

Crecimiento y decrecimiento

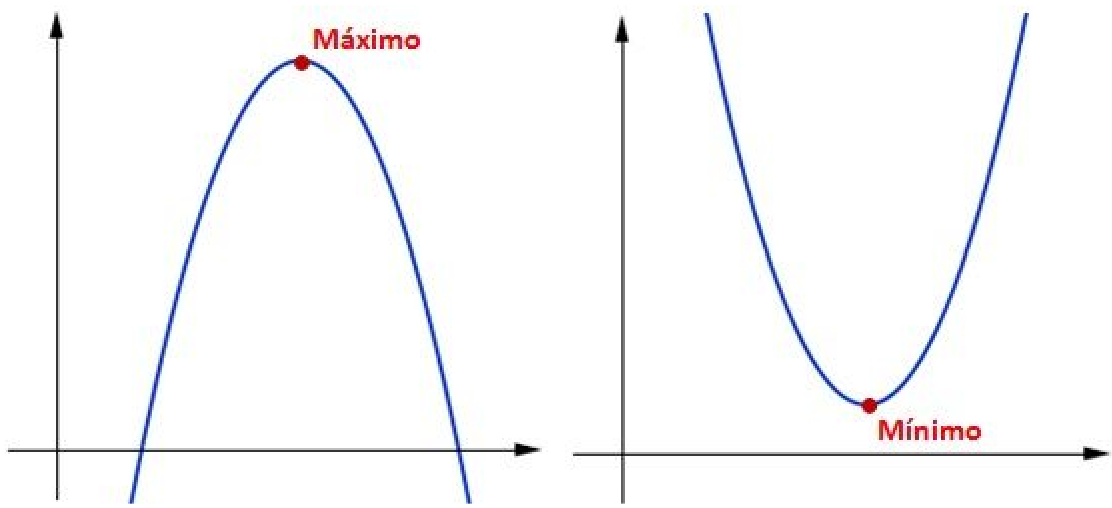
La **tasa de variación** indica cómo cambia una función al pasar de un punto a otro. Esta tasa examina si la función crece o decrece en una región.

El **crecimiento o decrecimiento**de una función *f* se puede estudiar en un intervalo [*a*,*b*], en un punto *x* o en todo el dominio.



Máximos y mínimos

Los **máximos y mínimos** en una función *f* son los valores más grandes (máximos) o más pequeños (mínimos) que toma la función, ya sea en una región (extremos relativos) o en todo su dominio (extremos absolutos).

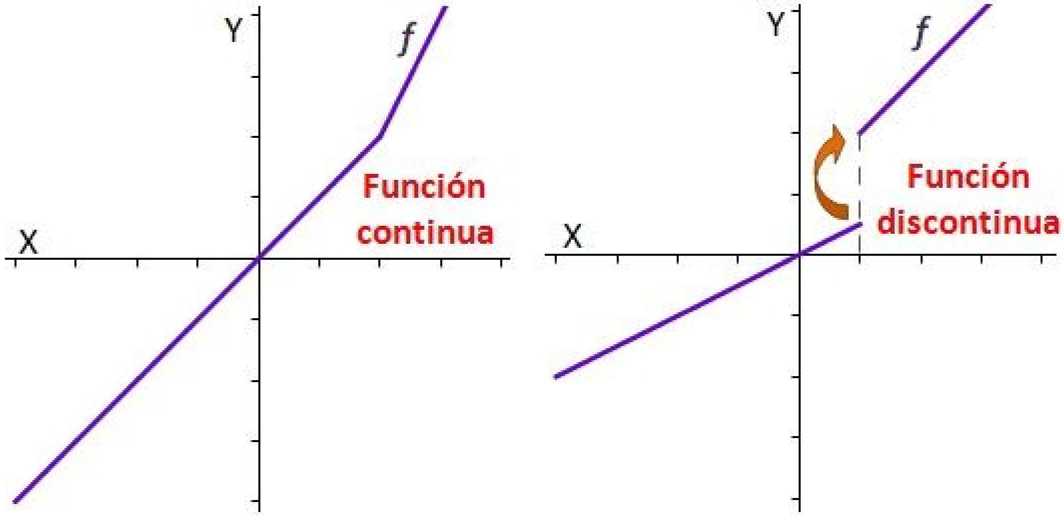


Los máximos y mínimos también se llaman **extremos de la función**.

Continuidad y discontinuidad

Una función es **continua** si su gráfica puede dibujarse de un solo trazo. Diríamos que es **continua** si puede dibujarse sin separar el lápiz de la hoja de papel.

Se dice que la función es **discontinua** si no es continua, es decir, presenta algún punto en el que existe un salto y la gráfica se *rompe*.



La **continuidad de una función** se estudia en diferentes sectores de la función:

- Continuidad en un punto
- Continuidad lateral
- Continuidad en un intervalo

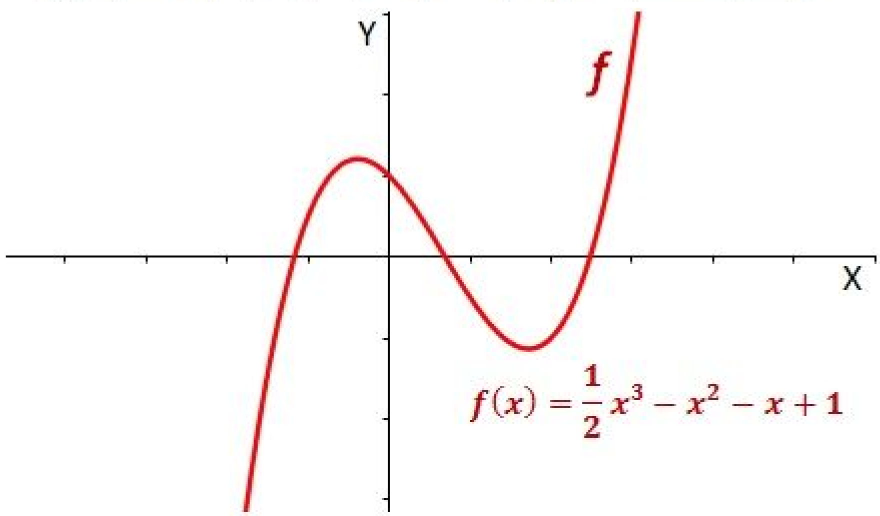
Tipos de funciones

Las **funciones** se pueden **clasificar**según su tipología:

Función polinómica

Una **función polinómica** *f* es una función cuya expresión es un **polinomio** tal como:

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$



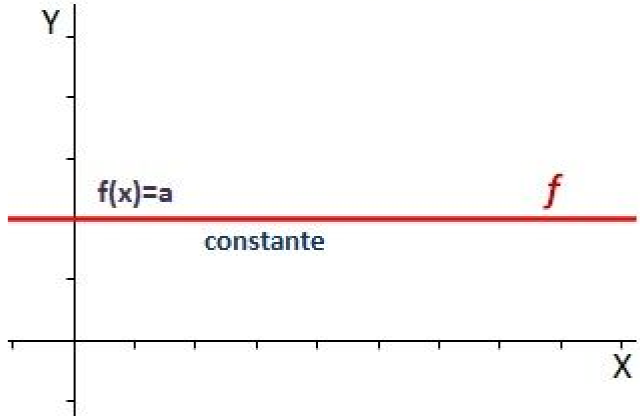
El **dominio** de las funciones polinómicas son todos los **números reales**.

Las funciones polinómicas son **continuas** en todo su dominio.

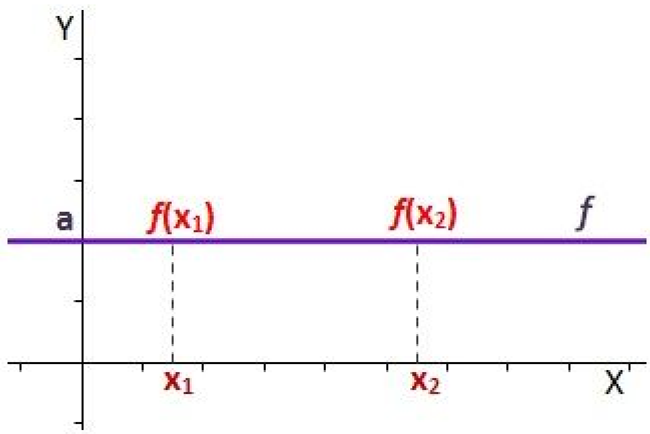
Función constante

Una función f es **constante** si la variable dependiente y toma el mismo valor a para cualquier elemento del dominio (variable independiente x).

$$f(x) = a \quad \text{siendo a constante}$$



En términos matemáticos, la función f es **constante** si para cualquier par de puntos x_1 y x_2 del dominio tales que $x_1 < x_2$, se cumple que $f(x_1) = f(x_2)$.



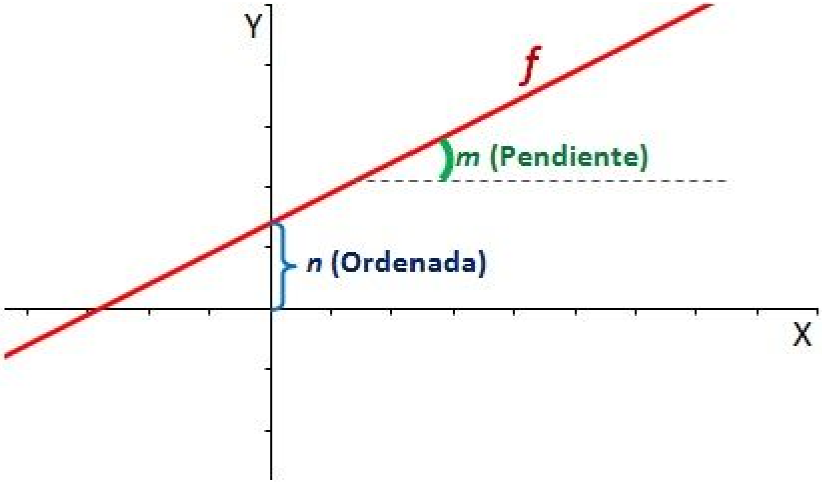
La **gráfica** de una **función constante** es una recta paralela al eje de abscisas X.

Función polinómica de primer grado

Las **funciones polinómicas de primer grado** o de grado 1 son aquellas que tienen un polinomio de grado 1 como expresión. Están compuestas por un escalar que multiplica a la variable independiente más una constante. Su mayor exponente es x elevado a 1.

$$f(x) = mx + n$$

$$\text{siendo } m \text{ la pendiente y } n \text{ la ordenada}$$



Su representación gráfica es una recta de pendiente *m*.

La *m* es la pendiente y la *n* la ordenada, o punto en donde corta la recta *f* al eje de ordenadas. Según los valores de *m* y *n* existen tres tipos:

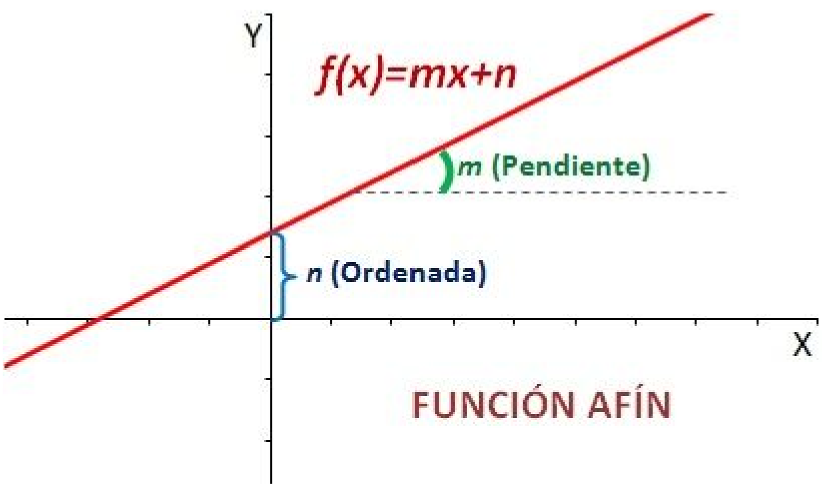
Función afín

Una **función afín** es una función polinómica de primer grado que no pasa por el origen de coordenadas, o sea, por el punto (0,0).

Las **funciones afines** son **rectas**definidas por la siguiente fórmula:

$$f(x) = mx + n$$

Los escalares *m* y *n* son diferentes de 0.

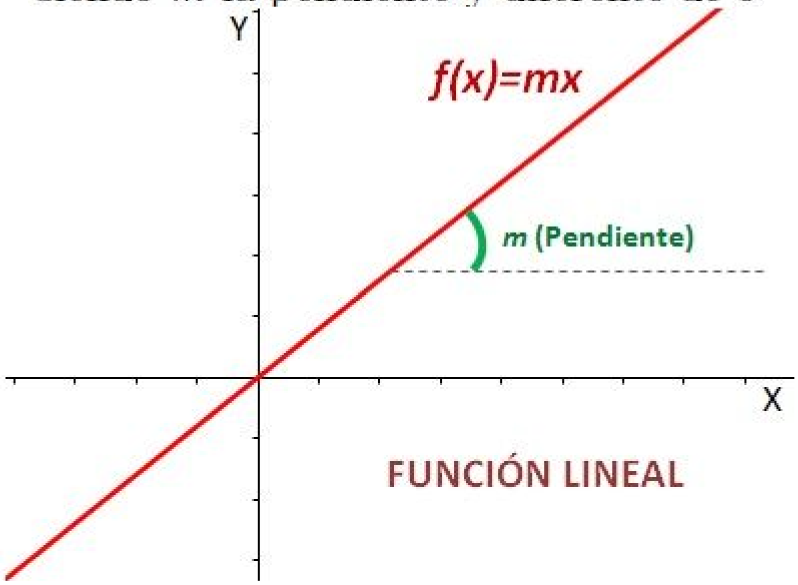


Función lineal

Una **función lineal** es una función polinómica de grado 1 que pasa por el origen de coordenadas, es decir, por el punto (0,0). Son funciones **rectas** de la forma:

$$f(x) = mx$$

siendo m la pendiente y diferente de 0

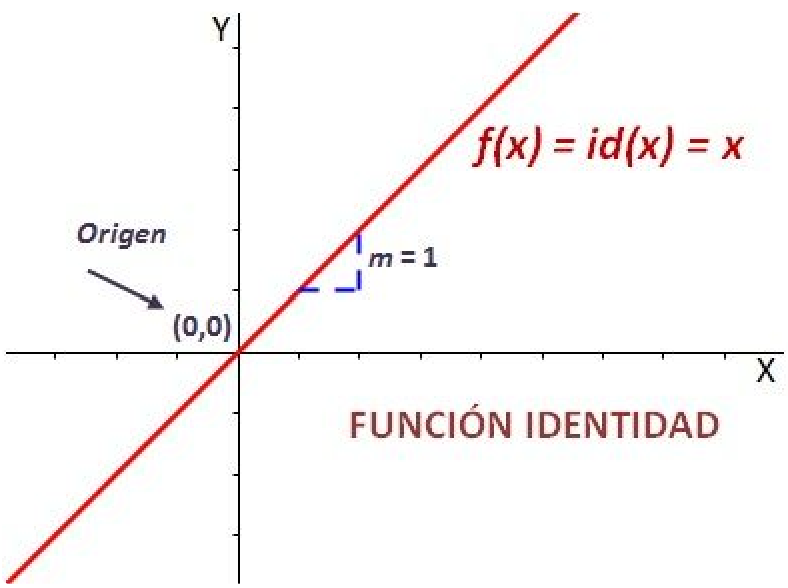


Función identidad

Una **función identidad** es una función tal que la imagen de cualquier elemento es éste mismo:

$$f(x) = x$$

Estas funciones también suele denotarse por ***id***.



La **función identidad** es una función lineal de pendiente m = 1 que pasa por el origen de coordenadas, es decir, por el punto (0,0). Divide el primer y el tercer cuadrante en partes iguales, o sea, es su bisectriz.

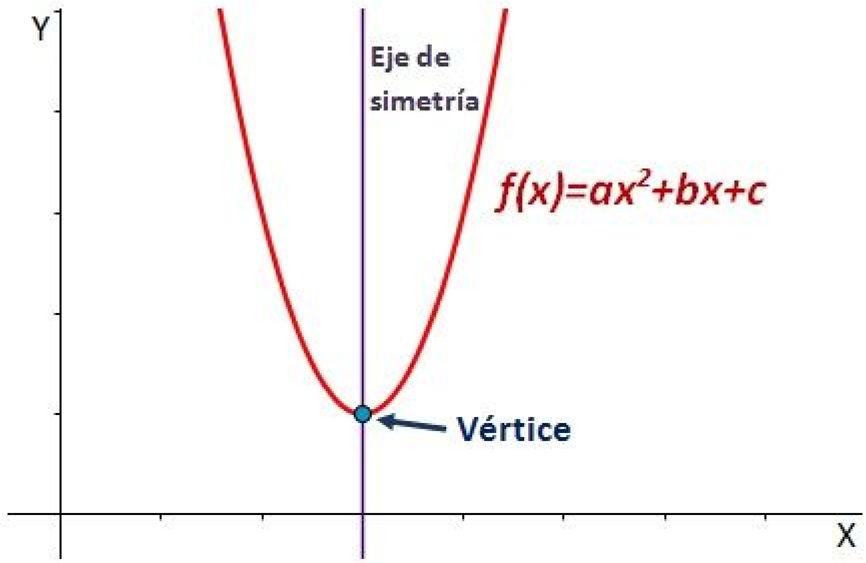
Función cuadrática

Las **funciones cuadráticas** (o funciones de segundo grado) son funciones polinómicas de **grado 2**, es decir, el mayor exponente del polinomio es *x* elevado a 2 (x^2):

$$f(x) = a\,x^2 + b\,x + c$$

$$\text{siendo } a \neq 0$$

Su **representación gráfica** es una parábola vertical.



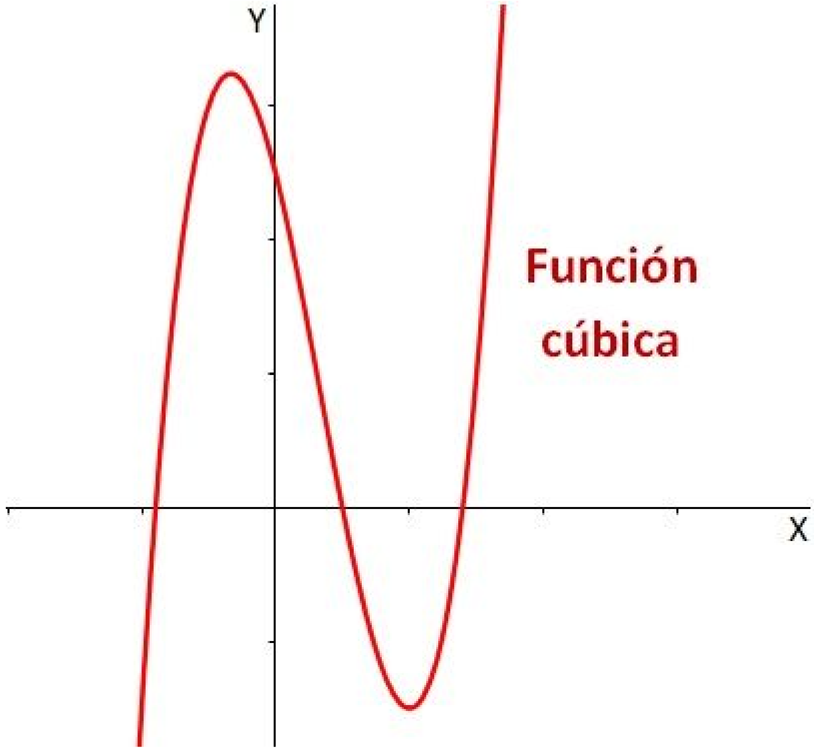
Función cúbica

Las **funciones cúbicas** (o funciones de tercer grado) son funciones polinómicas de **grado 3**, es decir, las que el mayor exponente del polinomio es *x* elevado a 3 (x^3):

$$f(x) = a\,x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$$

$$\text{siendo } a \neq 0$$

La **representación gráfica** de la función cúbica es:

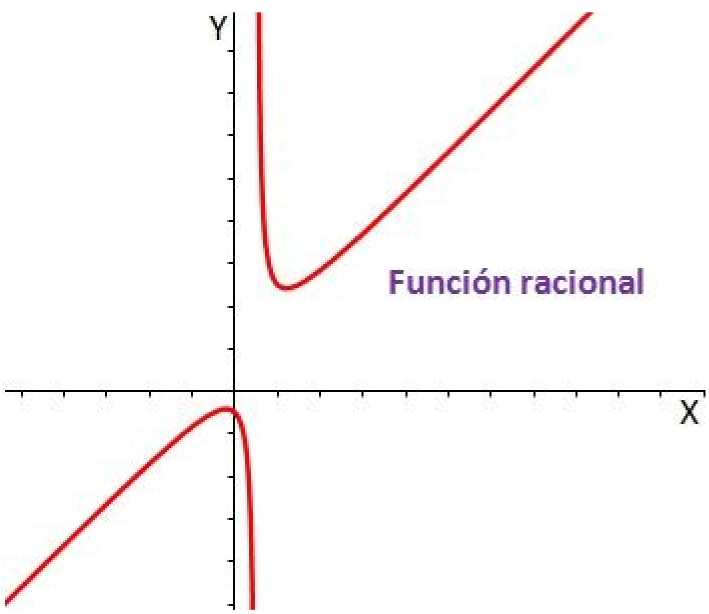


Función racional

Las **funciones racionales** *f*(*x*) son el cociente de dos polinomios. La palabra racional hace referencia a que esta función es una razón.

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

P(*x*) es el polinomio del numerador y *Q*(*x*) el del denominador.

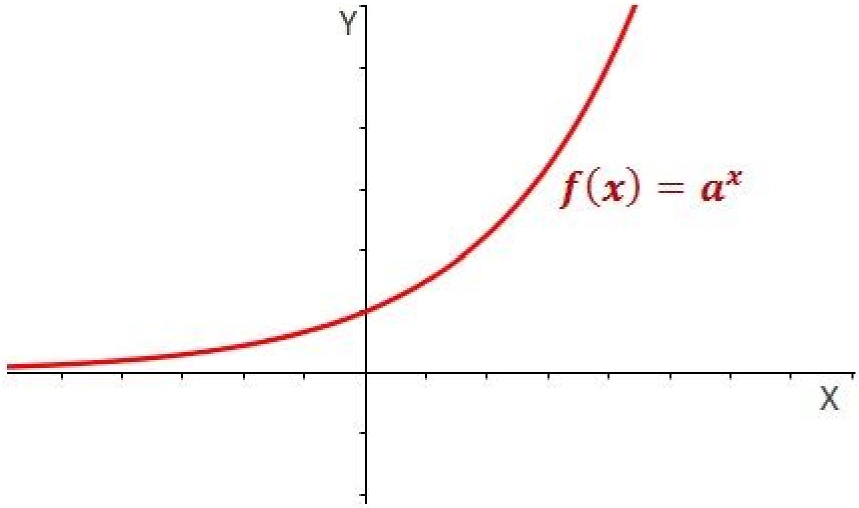


Función exponencial

Una **función exponencial** es aquella que la variable independiente *x*aparece en el **exponente** y tiene de base una constante *a*. Su expresión es:

$$f(x) = a^x$$

siendo *a* un real positivo, *a* > 0, y diferente de 1, *a* ≠ 1.



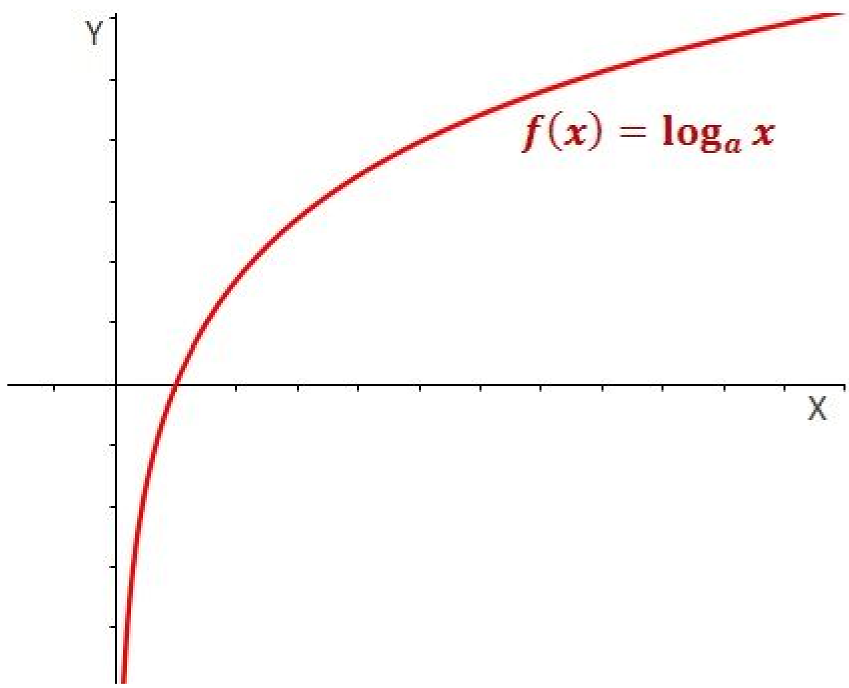
También se suele denotar la función como **exp (*x*)**.

Función logarítmica

Una **función logarítmica** está formada por un **logaritmo** de base *a*, y es de la forma:

$$f(x) = \log_a(x)$$

siendo *a* un real positivo, *a* > 0, y diferente de 1, *a* ≠ 1.



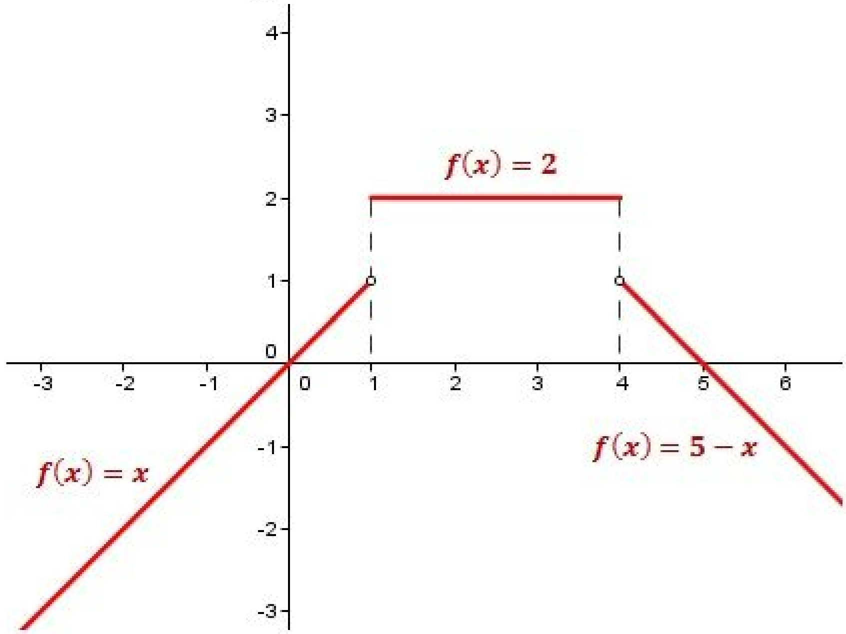
La **función logarítmica** es la inversa de la función exponencial.

Funciones definidas a trozos

Las **funciones definidas a trozos**(o **función por partes**) si la funcióntiene distintas expresiones o fórmulas dependiendo del intervalo (o trozo) en el que se encuentra la variable independiente (*x*).

Por ejemplo:

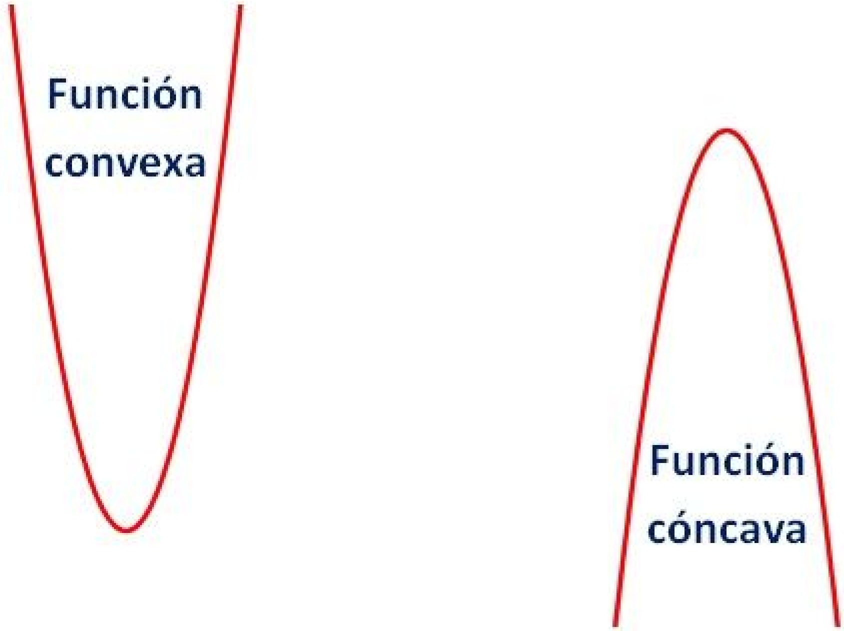
$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } -\infty < x < 1 \\ 2 & \text{si } 1 \leq x \leq 4 \\ 5 - x & \text{si } 4 < x < \infty \end{cases}$$



La imagen de un valor *x* se calcula según en que intervalo se encuentra *x*. Por ejemplo, el 0 se encuentra en el intervalo (-∞,1), por lo que su imagen es *f*(0)=0. El valor 3 está en el intervalo [1,4], entonces su imagen es *f*(3)=2.

Concavidad y convexidad

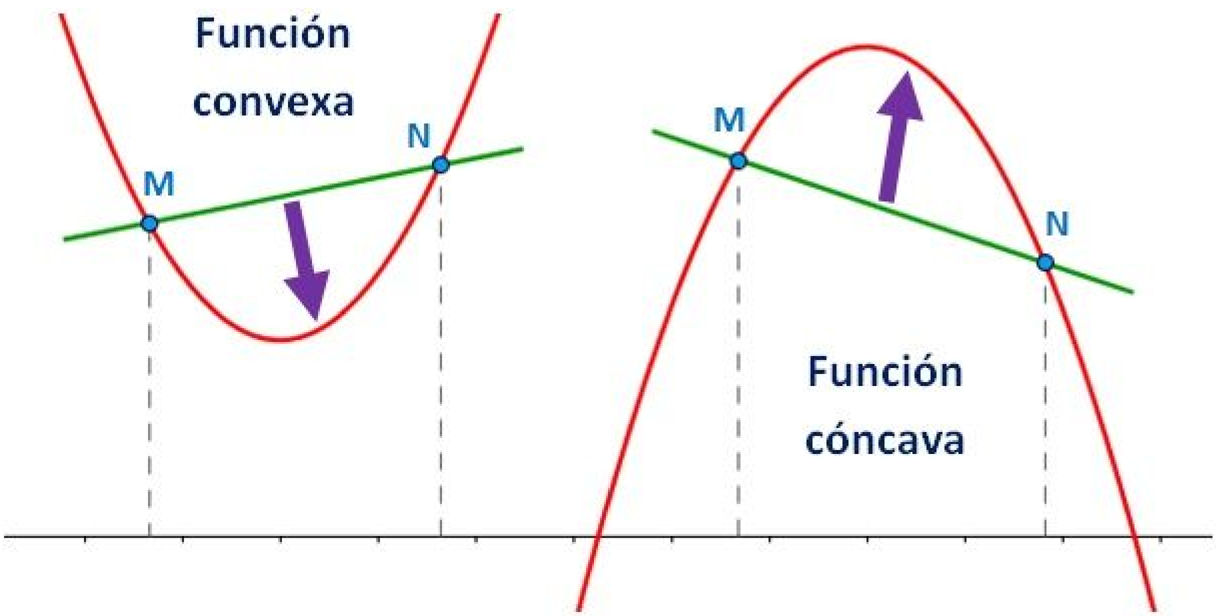
La **concavidad y convexidad**explica la forma geométrica que tiene una función.



En términos visuales, una función cóncava se asemeja a una montaña, mientras que una función convexa a un valle.

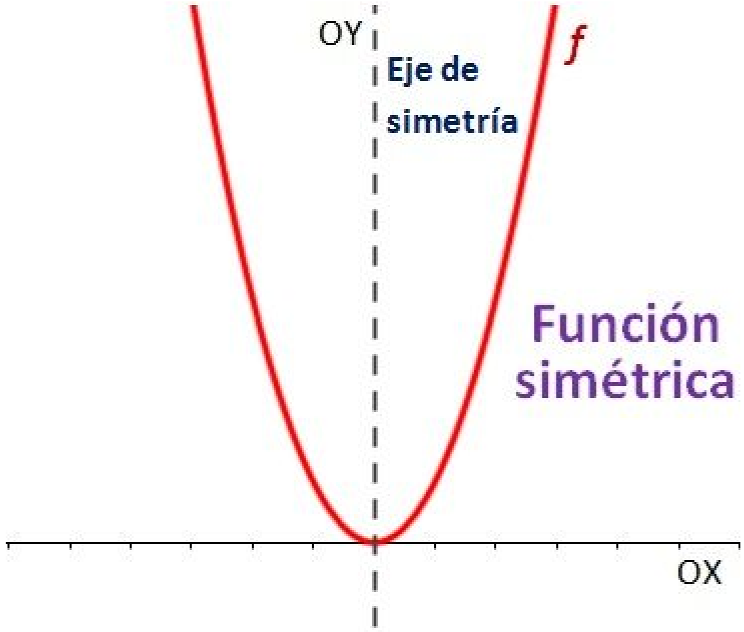
Diremos que una función es **cóncava** (o **cóncava hacia abajo**) si dados dos puntos cualesquiera (*M* y *N*) de su gráfica, el segmento que los une queda por debajo de la curva de la función. También se llaman funciones **estrictamente cóncavas**.

Análogamente, diremos que la función es **convexa** (o **cóncava hacia arriba**) si tomando dos puntos cualquiera (*M* y *N*), el segmento que los une queda por encima de la curva. También se llaman funciones **estrictamente convexas**.



Simetría

Una función *f* es **simétrica** si al doblar su gráfica por un eje de simetría ésta se superpone.



Existen dos tipos de simetrías:

1. Funciones simétricas respecto al eje de ordenadas *OY* (también se llaman **funciones pares**).
2. Funciones simétricas respecto al origen (también llamadas **funciones impares**).

Estudiar si la función es simétrica se llama **estudio de la simetría** o, al tratarse de funciones pares o impares, **estudio de la paridad**.

Las funciones que no son simétricas son **asimétricas**.